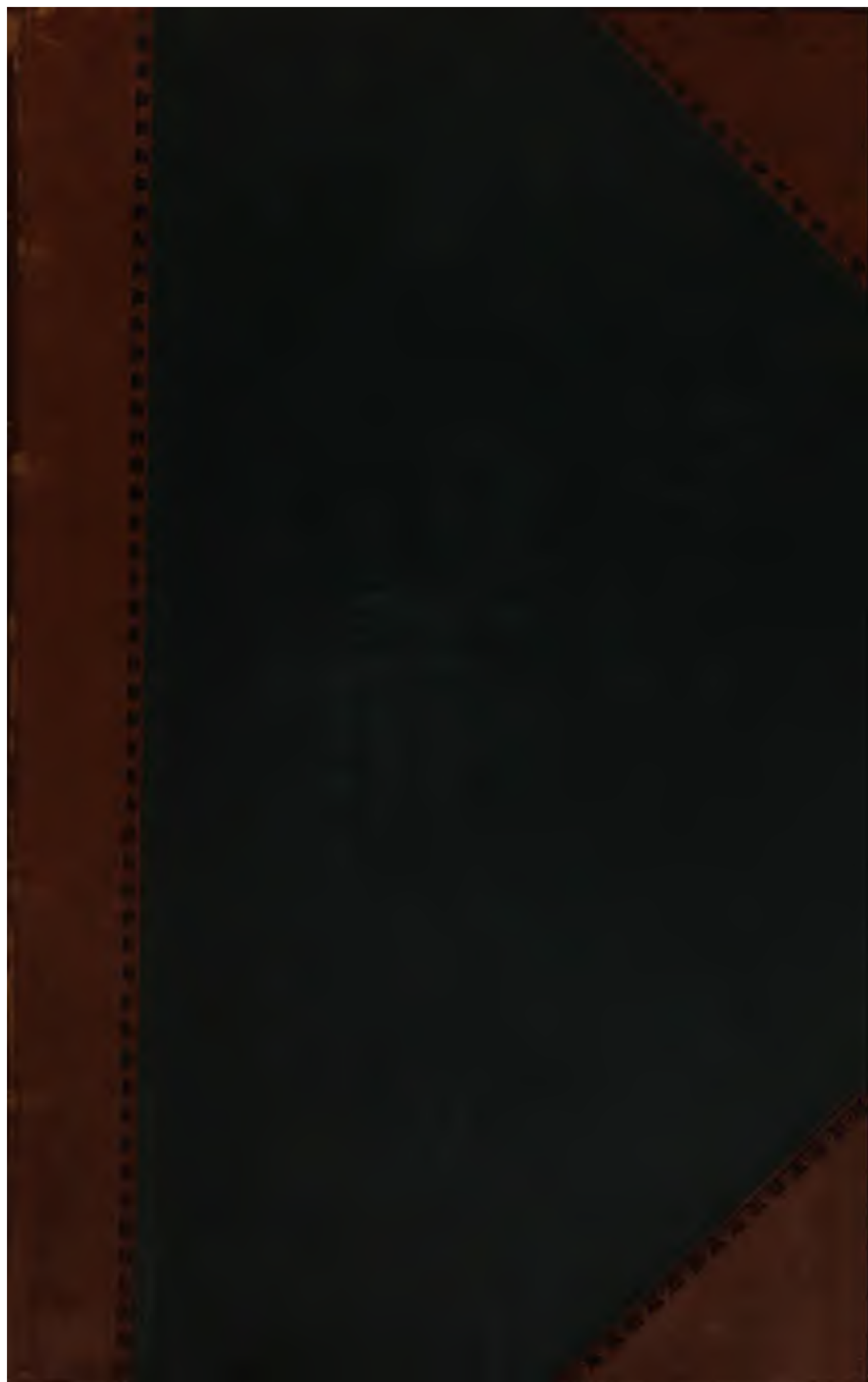
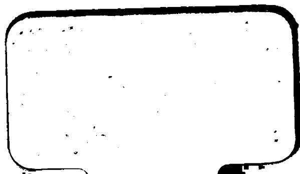






LEÇONS NOUVELLES

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Ouvrages du même auteur

LEÇONS NOUVELLES

DE

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

1 vol. in-8°. Prix : 6 fr.

LEÇONS NOUVELLES

D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

1 vol. in-8°. Prix : 4 fr.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GUIRAUDET ET JOUAUST,
338, RUE SAINT-HONORÉ.

LEÇONS NOUVELLES

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR A. AMIOT

Professeur de mathématiques au Lycée Saint-Louis, à Paris



PARIS
CHEZ GUIRAUDET ET JOUAUST
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
RUE SAINT-HONORÉ, N° 338

1853



TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LES

LEÇONS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Pages

Préliminaires. 1

LIVRE I.

Représentation du point, de la ligne droite et du plan.

CHAPITRES I. Des projections du point. 5
II. Des projections de la ligne droite. . . 5
III. Des traces du plan. 18
IV. Construction des traces d'un plan d'après certaines données. 22
V. De la transformation des projections. . 15

LIVRE II.

Des polyèdres.

Pages

CHAPITRES I. Intersection de deux plans, d'une ligne droite et d'un plan. 44
II. Détermination des distances. 54
III. Construction des angles formés par des lignes droites et des plans. 61
IV. Projections d'un polyèdre. — Développement de sa surface. 78
V. Intersection de deux polyèdres. . . . 88

LIVRE III.

Plans tangents aux surfaces courbes.

CHAPITRES I. Propriétés générales des surfaces courbes. 97
II. Plans tangents aux cylindres. 109
III. Plans tangents aux surfaces coniques. . 116
IV. Plans tangents aux surfaces gauches. . 122
V. Plans tangents aux surfaces de révolution. — Surfaces du second ordre. . 129

LIVRE IV.

Intersection des surfaces courbes.

CHAPITRES I. Sections planes des surfaces réglées . . 148
II. Sections planes des surfaces de révolution. 163

Pages

III. Intersection de deux surfaces réglées. . 170

IV. Intersection de deux surfaces de révolution. 178

NOTE sur les sections planes et semblables des surfaces du second ordre et de révolution. 186

FIN DE LA TABLE.

ERRATA.

TEXTE.

Page 152, ligne 26, au lieu de *La transformé*, lisez *Lorsque le cylindre est circulaire, la transformée.*

Page 152, ligne 27, au lieu de $y = \frac{\tang \alpha}{r} \sin x$,

lisez $y = r \tang \alpha \sin \frac{x}{r}$

Page 160, ligne 12, au lieu de 1—2, lisez 1 + 2.

Page 184, ligne 23, au lieu de *aplati*, lisez *allongé.*

Page 184, même ligne, au lieu de *deux nappes*, lisez *une nappe.*

Page 188, ligne 17, au lieu de *aplati*, lisez *allongé.*

Page 189, ligne 18, au lieu de *aplati*, lisez *allongé.*

Page 189, ligne 22, au lieu de *deux nappes*, lisez *une nappe.*

Page 189, ligne dernière, au lieu de *une seule nappe*, lisez *deux nappes.*

PLANCHES.

Planche 19, fig. 90, supprimez la lettre *u*, et faites passer la droite *ef* par le point *r*.

LEÇONS NOUVELLES

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

PRÉLIMINAIRES.

1° — « La *Géométrie descriptive* (*) a pour objet de re-
» présenter sur un plan, surface à deux dimensions, les
» corps qui en ont trois; ou, en d'autres termes, de ré-
» unir dans une figure plane tous les éléments nécessai-
» res pour faire connaître la forme, et la position dans
» l'espace, d'une figure à trois dimensions.

» Sous ce point de vue général, on conçoit que la géo-
» métrie descriptive a dû exister dans tous les temps. Et,
» en effet, c'est par des dessins sur une aire plane que
» les appareilleurs et les charpentiers ont, dans tous les
» temps, déterminé les formes des corps à trois dimen-
» sions qu'ils avaient à construire.

» Toutefois, on n'avait pas songé à rattacher les ques-
» tions de cet art à un petit nombre d'opérations abstrai-
» tes et élémentaires, et surtout à présenter celles-ci dans
» un traité spécial et sous un titre particulier, qui leur
» donnât un caractère de doctrine indépendant des prati-
» ques, d'où il avait suffi de les faire sortir. C'est là ce

(*) *Cours de géométrie supérieure*, par M. Chasles. Séance d'ouverture le 22 décembre 1846.

» que *Monge* a conçu, et ce qu'il a exécuté avec infini-
» ment de talent », dans ses leçons de géométrie descriptive à l'École Normale.

« Quant aux applications spéciales et les plus fréquen-
» tes de cet art, ce sont la perspective, la construction
» des reliefs, la détermination des ombres, la gnomoni-
» que, la coupe des pierres et la charpente.

» Une foule d'autres travaux, tels que le percement
» des routes et des canaux dans les pays accidentés, la
» direction des mines souterraines, le défilement dans la
» science des fortifications, etc., sont encore du domaine
» de la géométrie descriptive. »

2° — On appelle *projection* d'un point sur un plan le pied de la perpendiculaire menée par ce point sur le plan.

Tous les points d'une ligne droite perpendiculaire à un plan ont la même projection sur ce plan.

La *projection d'une ligne* droite ou courbe sur un plan est le lieu des projections des points de cette ligne sur le plan.

3° — Dans la géométrie descriptive, on rapporte la position des corps à deux plans rectangulaires qu'on appelle *plans de projection.* Ordinairement l'un de ces plans est *vertical* et l'autre *horizontal*, bien qu'ils puissent être placés d'une manière quelconque dans l'espace.

Soient AL (fig. 1) le plan horizontal, SL le plan vertical, et LT leur intersection, qu'on nomme *ligne de terre.* Je suppose la personne qui fait ou lit un dessin de géométrie descriptive placée sur le plan horizontal, de telle sorte qu'elle ait la lettre L à sa gauche et la lettre T à sa droite, en regardant le plan vertical; c'est-à-dire que cette personne se trouve dans l'angle dièdre STLA, qui

est l'un des quatre angles dièdres formés par les plans de projection. Il résulte de cette convention : 1° que le plan horizontal divise le plan vertical en deux parties, dont l'une SL est *supérieure* et l'autre IL *inférieure* au plan horizontal; 2° que le plan vertical divise le plan horizontal en deux parties AL, PL, qui sont l'une *postérieure* et l'autre *antérieure* au plan vertical.

Chacun des quatre angles dièdres que forment les plans de projection se désigne par les noms de ses faces : ainsi l'angle dièdre ALTS est appelé *antérieur-supérieur;* l'angle dièdre ALTI, *antérieur-inférieur;* l'angle dièdre PLTI, *postérieur-inférieur*, et l'angle dièdre PLTS, *postérieur-supérieur*.

4° Pour faire sur le même plan toutes les constructions relatives à la solution de chaque question, on *rabat* (fig. 1 et 2) le plan vertical de projection sur le plan horizontal, supposé fixe, en le faisant tourner autour de la ligne de terre dans un sens tel que sa partie supérieure SL vienne coïncider avec la partie postérieure PL du plan horizontal, et sa partie inférieure IL avec la partie antérieure AL du même plan horizontal. Alors les dessins tracés sur chacun des plans de projection sont ramenés dans le même plan, et ne forment qu'une seule figure, qui est l'*épure* de la question proposée.

On évite la confusion que pourrait produire la coïncidence des deux plans de projection, en convenant de désigner par des lettres accentuées les points du plan vertical, et par des lettres sans accent les points du plan horizontal.

5° Lorsqu'une portion quelconque d'une ligne, droite ou courbe, est située dans l'angle dièdre *antérieur-supérieur*,

elle est *visible* à la personne qui lit l'épure, tandis que l'autre portion de cette ligne lui est cachée par les plans de projection. Pour les distinguer dans l'épure, je représenterai par des lignes *pleines et continues* les projections des parties visibles des données et des inconnues de tout problème, et par des lignes *formées de points ronds* les projections de leurs parties cachées par le plan horizontal et le plan vertical. Je me servirai de lignes *discontinues*, c'est-à-dire *composées de longs traits*, pour figurer les projections des lignes auxiliaires quelconques.

LIVRE I.

REPRÉSENTATION

DU POINT, DE LA LIGNE DROITE ET DU PLAN

CHAPITRE I.

Des projections du point.

On appelle projection *horizontale* et projection *verticale* d'un point ses projections sur le plan horizontal et sur le plan vertical.

On désigne chaque point de l'espace par une lettre majuscule, telle que A, et ses projections par les petites lettres correspondantes *a*, *a'*.

THÉORÈME I.

Dans toute épure, la droite qui joint les projections d'un point B *est perpendiculaire à la ligne de terre.*

Soient *b* (fig. 3) la projection horizontale du point B et *b'* sa projection verticale. La droite B*b* est perpendiculaire au plan horizontal, et la droite B*b'* au plan vertical : donc le plan *b*B*b'* est perpendiculaire à chacun des plans de projection, et, par suite, à leur intersection LT, qu'il rencontre au point C. Cela posé, je rabats le plan vertical de projection sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de la ligne de terre de telle sorte que la partie supérieure SL du plan vertical vienne coïncider avec la partie postérieure PL du plan horizontal : la droite C*b'*, perpendiculaire à la ligne de terre,

engendre le plan *bBb'* dans son mouvement, et vient se placer sur la droite indéfinie *b*C, aussi perpendiculaire à la ligne LT. Donc, si *b"* est la position du point *b'* après le rabattement, les points *b*, *b"*, sont les projections du point B dans l'épure, et la droite *bb"* est perpendiculaire à la ligne de terre.

Scholie. — Si le point B est dans l'un des plans de projection, par exemple dans le plan horizontal, il coïncide avec sa projection horizontale *b*, et sa projection verticale *b'* se trouve au point C, sur la ligne de terre.

THÉORÈME II.

Dans toute épure, deux points quelconques b et b" d'une ligne droite perpendiculaire à la ligne de terre sont les projections d'un point de l'espace.

Soit C (fig. 3) le point d'intersection des droites *bb"* et LT, qui sont, par hypothèse, perpendiculaires l'une à l'autre. Je *relève* le plan vertical, c'est-à-dire que je le ramène à être perpendiculaire au plan horizontal, en le faisant tourner autour de la ligne de terre dans un sens contraire à celui du rabattement; et je suppose que la droite C*b"* prenne la position C*b'* après sa rotation. Les droites C*b* et C*b'* déterminent un plan perpendiculaire à la ligne de terre. Si je trace par le point *b* une perpendiculaire au plan horizontal, et par le point *b'* une perpendiculaire au plan vertical, ces deux droites sont situées dans le même plan *b*C*b* et se rencontrent, puisqu'elles sont respectivement parallèles aux deux droites concourantes C*b*, C*b'*. Donc leur intersection B a pour projections les points *b* et *b"*.

Corollaire. — Deux points quelconques d'une ligne

droite oblique à la ligne de terre ne sont pas les projections d'un point de l'espace.

THÉORÈME III.

La distance d'un point B à l'un des plans de projection est égale à la distance de sa projection sur l'autre plan à la ligne de terre.

Soient b, b' (fig. 3), les projections du point B, et C l'intersection de la ligne de terre et du plan bCb', perpendiculaire à cette droite. Le quadrilatère $BbCb'$ est un rectangle, parce que ses côtés adjacents sont perpendiculaires entre eux : donc 1° la distance Bb du point B au plan horizontal est égale à la distance $b'C$ de la projection verticale b' de ce point à la ligne de terre ; 2° la distance Bb' du même point au plan vertical est égale à la distance bC de sa projection horizontale b à la ligne de terre.

Corollaire. — Lorsque le point B est situé dans l'un des plans bissecteurs des angles dièdres que forment les plans de projection, ses projections b, b', sont également éloignées de la ligne de terre.

Si ce point se trouve dans le bissecteur des angles dièdres postérieur-supérieur et antérieur-inférieur, ses deux projections sont du même côté de la ligne de terre et coïncident.

PROBLÈME A RÉSOUDRE.

Un point peut avoir neuf positions différentes par rapport aux plans de projection : il se trouve dans l'un des quatre angles dièdres formés par les plans de projection, ou dans l'une des quatre parties de ces plans, ou bien sur la ligne de terre. Faire le tableau des positions correspondantes des projections de ce point.

CHAPITRE II.

Des projections de la ligne droite.

On appelle projection *verticale* et projection *horizontale* d'une ligne droite ses projections sur le plan vertical et sur le plan horizontal.

Les *traces* d'une ligne droite sont les points d'intersection de cette ligne et des plans de projection. Une trace est *verticale* ou *horizontale* selon qu'elle est située sur le plan vertical ou sur le plan horizontal.

Toute ligne droite parallèle au plan horizontal est *horizontale*.

Toute droite perpendiculaire au plan horizontal est *verticale*.

THÉORÈME I.

Si une ligne droite AB *est oblique ou perpendiculaire au plan* MN, *sa projection sur ce plan est une ligne droite ou un point.*

1° Si la droite AB (fig. 4) est oblique au plan MN, les perpendiculaires tracées des différents points de cette ligne sur ce plan sont distinctes, et déterminent un plan AB*ab*, perpendiculaire à MN. Donc le lieu des pieds de ces droites, c'est-à-dire la projection de AB sur MN, est l'intersection *ab* des plans MN et AB*ab*.

On dit que le plan AB*ab* projette *horizontalement* ou *verticalement* la droite AB, selon que le plan MN est horizontal ou vertical.

2° Lorsque la droite AB est perpendiculaire au plan MN, tous ses points ont pour projection le point A où elle rencontre le plan. Donc le point A est la projection de la droite AB sur le plan MN.

Corollaire I. — La projection d'une ligne droite sur un plan est déterminée par les projections de deux points quelconques de cette ligne sur ce plan.

Corollaire II. — La droite est la seule ligne dont les projections sur deux plans soient des lignes droites. Car les plans projetants déterminés par ces projections rectilignes ne peuvent se couper que suivant une ligne droite.

Lorsqu'une ligne courbe est plane et que son plan est perpendiculaire à l'un des plans de projection, sa projection sur ce plan est une ligne droite, mais sa projection sur l'autre plan est une ligne courbe.

Corollaire III. — Si la droite qui joint deux points A et B est parallèle à un plan MN, elle est égale à sa projection sur ce plan; au contraire, si cette droite est oblique au plan MN, elle est plus grande que sa projection.

Car 1° si AB est parallèle au plan MN, le quadrilatère AB*ba* est un rectangle, et les côtés opposés AB, *ab*, sont égaux. On dit alors que *la droite* AB *se projette en vraie grandeur sur le plan* MN.

2° Si AB est oblique au plan MN, le quadrilatère AB*ba* est un trapèze, dans lequel le côté *ab* mesure la plus courte distance des bases parallèles A*a*, B*b*: donc la droite *ab* est moindre que AB.

THÉORÈME II.

Lorsqu'une ligne droite AB, *non située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, rencontre les deux plans*

de projection, ses deux projections sont obliques à la ligne de terre.

Soient A*b* et *a*'B' (fig. 5) les projections de la droite AB' qui traverse les deux plans de projection aux points A et B'. Le plan A*b*B', projetant horizontalement la droite AB', rencontre par hypothèse le plan vertical et lui est oblique : donc l'angle rectiligne A*ba*' de l'angle dièdre formé par ces plans n'est pas droit, c'est-à-dire que la projection horizontale A*b* de la droite AB' est oblique à la ligne de terre.

On prouverait de même que la projection verticale *a*'B' de la droite AB' est oblique sur LT.

Scholie. — Si la droite AB' (fig. 6) est située dans un plan A*b*B' perpendiculaire sur la ligne de terre, ce plan la projette à la fois sur les deux plans de projection, et, dans l'épure, les projections A*b*', *a'b*', de la droite AB', sont sur une même droite perpendiculaire à la ligne de terre.

Il faut remarquer alors que toutes les lignes droites tracées sur le plan A*b*B' ont les mêmes projections que la droite AB'. Pour déterminer l'une d'entre elles, on donne les projections de deux points quelconques de cette ligne.

THÉORÈME III.

Si une ligne droite AB *est parallèle à l'un des plans de projection, sans être perpendiculaire à l'autre, sa projection sur le premier plan est oblique à la ligne de terre, et sa projection sur le second plan lui est parallèle.*

Je suppose la droite AB (fig. 7) parallèle au plan vertical, sans être perpendiculaire au plan horizontal. Cette

droite et sa projection verticale *a'b'* sont parallèles; or, par hypothèse, la ligne AB est oblique au plan vertical : donc 1° sa projection verticale *a'b'* est oblique à la ligne de terre.

La droite A*a'*, qui projette le point A sur le plan horizontal, et la droite AB, étant parallèles au plan vertical de projection, le plan AB*ab* qu'elles déterminent est aussi parallèle au plan vertical, et les intersections *ab*, LT, de ces deux plans parallèles par le plan horizontal, sont des droites parallèles : donc 2° la projection horizontale de AB est parallèle à la ligne de terre.

Corollaire. — *Lorsqu'une ligne droite est parallèle à la ligne de terre, ses deux projections sont aussi parallèles à la ligne de terre.*

Car la droite donnée est parallèle à chacun des plans de projection.

THÉORÈME IV.

Si une ligne droite AB *est perpendiculaire à l'un des plans de projection, sa projection sur ce plan est un point, et sa projection sur l'autre plan est une droite perpendiculaire à la ligne de terre et passant par le point.*

Je suppose la droite AB (fig. 8) perpendiculaire au plan horizontal; elle a pour projection horizontale le point A où elle rencontre ce plan de projection.

Soit *a'* la projection verticale du point A; le plan BA*a'*, qui projette la droite AB verticalement, est perpendiculaire aux deux plans de projection, et, par conséquent, à leur intersection LT. Donc la projection verticale *a'b'* de la droite AB est aussi perpendiculaire à la ligne de terre.

Lorsque le plan vertical de projection est rabattu sur le plan horizontal, le prolongement de la droite $a'b'$ passe par le point A.

Scholie relatif aux trois théorèmes précédents. — Deux lignes droites situées dans les plans de projection et non perpendiculaires à la ligne de terre sont les projections d'une ligne droite de l'espace.

Deux lignes droites situées dans les plans de projection et perpendiculaires à la ligne de terre ne sont les projections d'une ligne droite que lorsqu'elles rencontrent la ligne de terre au même point, mais cette droite n'est pas déterminée.

Deux lignes droites qui sont tracées sur les plans de projection et dont une seule est perpendiculaire à la ligne de terre ne peuvent être les projections d'une ligne droite.

THÉORÈME V.

Si deux lignes droites AB, CD, *sont parallèles, leurs projections de même nom sont parallèles, et réciproquement.*

Soient ab et cd (fig. 9) les projections horizontales des droites AB et CD. Les angles ABb, CDd, ont leurs côtés parallèles chacun à chacun : donc les plans de ces angles sont parallèles, et leurs intersections ab, cd, par le plan horizontal de projection, sont parallèles. — On prouverait de même le parallélisme des projections verticales $a'b'$ et $c'd'$.

Réciproquement, *Les droites* AB *et* CD *sont parallèles si leurs projections de même nom sont parallèles, sans être perpendiculaires à la ligne de terre.*

En effet, les angles *abB*, *cdD*, ayant leurs côtés parallèles chacun à chacun, les plans de ces angles sont parallèles, et la droite CD est parallèle au plan *abB*, qui projette horizontalement la droite AB. De même, la droite CD est parallèle à l'autre plan projetant de AB : donc elle est parallèle à l'intersection AB de ces plans.

Scholie. — Cette démonstration de la réciproque suppose que les plans projetants de la droite AB ne coïncident pas. Dans l'hypothèse contraire, les droites AB et CD sont situées dans des plans perpendiculaires à la ligne de terre, et peuvent n'être pas parallèles, bien que leurs projections de même nom le soient toujours.

THÉORÈME VI.

Si deux lignes droites AB *et* CD *se rencontrent en un point* E, *leurs projections de même nom se coupent en des points qui sont les projections du point* E.

Car, le point E étant commun aux deux droites AB et CD, sa projection horizontale *e* se trouve sur chacune des projections horizontales *ab*, *cd*, de ces droites, et sa projection verticale *e'* sur chacune de leurs projections verticales *a'b'*, *c'd'*.

Scholie. — Si la droite qui joint le point d'intersection des projections verticales de deux lignes droites AB, CD, au point d'intersection de leurs projections horizontales, est perpendiculaire à la ligne de terre, les droites AB, CD, ont un point commun.

Dans l'hypothèse contraire, les droites AB et CD ne sont pas situées dans un même plan.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

1. Faire le tableau des six positions qu'une ligne droite peut avoir à l'égard des plans de projection, lorsqu'elle est parallèle à l'un d'eux sans être perpendiculaire à l'autre.

2. Faire le tableau des neuf positions d'une droite, parallèle à la ligne de terre, par rapport aux plans de projection.

3. Faire le tableau des six positions d'une ligne droite relativement aux plans de projection, lorsqu'elle est perpendiculaire à l'un de ces plans.

4. Les projections de deux points d'une ligne droite étant données, construire les projections de cette droite.

5. Les traces d'une ligne droite étant données, construire les projections de cette droite.

6. Mener par un point dont les projections sont données une droite parallèle à une ligne droite dont les projections sont aussi données.

7. Démontrer que, si une ligne droite qui rencontre la ligne de terre est située dans l'un des plans bissecteurs des angles dièdres formés par les plans de projection, les projections de cette droite font des angles égaux avec la ligne de terre. La réciproque est vraie.

8. Les projections d'une ligne droite étant données, déterminer les projections des points de cette droite situés dans les plans bissecteurs des angles dièdres formés par les plans de projection.

CHAPITRE III.

Des traces du plan.

Pour déterminer la position d'un plan dans l'espace on donne, en général, les droites suivant lesquelles ce plan rencontre les plans de projection. Ces droites sont appelées les *traces* du plan. La trace *horizontale* est située sur le plan horizontal de projection, et la trace *verticale* sur le plan vertical.

Je désignerai chacune des traces d'un plan par deux grandes lettres, pour ne pas les confondre avec les projections d'une ligne droite qui rencontre la ligne de terre ou lui est parallèle. Ainsi le plan (AB, A'B') a pour trace horizontale la droite AB, et pour trace verticale la droite A'B'.

Un plan est *horizontal* lorsqu'il est parallèle au plan horizontal de projection ; il est *vertical* s'il est perpendiculaire au plan horizontal.

Un plan ne peut avoir que deux positions différentes par rapport aux plans de projection : il les rencontre tous deux, ou il n'en rencontre qu'un seul et est parallèle à l'autre. Je vais examiner, dans ces deux cas, la position des traces du plan relativement à la ligne de terre.

THÉORÈME I.

Si un plan rencontre les deux plans de projection, ses traces doivent concourir au même point de la ligne de terre, ou être parallèles à cette droite, ou bien coïncider avec elle.

Le plan donné peut rencontrer la ligne de terre, lui être parallèle, ou passer par cette droite :

1° S'il rencontre la ligne de terre, ses traces passent par le point d'intersection qui est commun au plan donné et à chacun des plans de projection.

2° S'il est parallèle à la ligne de terre, ses traces sont évidemment parallèles à cette droite.

3° S'il passe par la ligne de terre, ses traces coïncident avec cette ligne.

Scholie. — Dans les deux premiers cas, les traces du plan le déterminent, puisqu'on ne peut conduire qu'un plan par deux lignes droites concourantes ou parallèles.

Dans le troisième cas, le plan n'est plus déterminé par ses traces, qui se réduisent à une seule droite. Pour fixer la position de ce plan, il faut donner encore l'un quelconque de ses points.

COROLLAIRE I. Si un plan est perpendiculaire à l'un des plans de projection, son intersection avec l'autre est perpendiculaire à la ligne de terre.

En effet, si ce plan est perpendiculaire au plan horizontal, sa trace verticale est l'intersection de deux plans perpendiculaires au plan horizontal : donc elle est perpendiculaire à la ligne de terre.

COROLLAIRE II. Les traces d'un plan perpendiculaire à

chacun des plans de projection sont perpendiculaires à la ligne de terre.

THÉORÈME II.

Si un plan est parallèle à l'un des plans de projection, il n'a qu'une trace qui est parallèle à la ligne de terre.

Je suppose le plan donné parallèle au plan vertical de projection : il est évident qu'il n'a pas de trace verticale, et sa trace horizontale est parallèle à la ligne de terre, parce que ces droites sont les intersections de deux plans parallèles par le plan horizontal de projection.

Scholie. — Une ligne droite tracée sur l'un des plans de projection parallèlement à la ligne de terre détermine un plan parallèle à l'autre plan de projection.

THÉORÈME III.

Lorsqu'une ligne droite est située dans un plan, chacune de ses traces se trouve sur la trace correspondante du plan, et réciproquement.

La trace horizontale de la droite est un point commun au plan qui contient la droite et à l'un des plans de projection : donc elle se trouve sur la trace horizontale du plan donné. Pareillement, la trace verticale de la droite est située sur la trace verticale du plan.

La réciproque est évidente.

COROLLAIRE I. — *La trace horizontale d'une ligne droite est le point d'intersection des traces horizontales des deux plans qui projettent cette droite sur les plans de projection. — Sa trace verticale est le point de rencontre des traces verticales des mêmes plans.*

COROLLAIRE II. — Une ligne droite est parallèle à un plan lorsqu'elle est parallèle à une droite dont les traces sont deux points quelconques des traces du plan.

THÉORÈME IV.

Lorsqu'une ligne droite AB *est perpendiculaire à un plan* (CD, C′D′), *chacune de ses projections est perpendiculaire à la trace correspondante du plan, et réciproquement.*

Je dis, par exemple (fig. 10), que la projection horizontale *ab* de la droite AB est perpendiculaire à la trace horizontale CD du plan. En effet, le plan horizontal de projection et le plan donné étant perpendiculaires au plan projetant AB*ba*, leur intersection CD est aussi perpendiculaire à ce plan. Donc la droite CD est perpendiculaire à la droite *ab* qui passe, par son pied *e*, dans le plan AB*ba*.

Réciproquement, *Une ligne droite* AB *est perpendiculaire à un plan* (CD, C′D′) *non parallèle à la ligne de terre, si les projections de cette droite sont respectivement perpendiculaires aux traces du plan.*

La droite CD, perpendiculaire à la projection horizontale *ab* de la droite AB, est aussi perpendiculaire au plan projetant AB*ba*; de même la droite C′D′ est perpendiculaire au plan AB*b*′*a*′ qui projette AB verticalement. Donc le plan des deux droites CD, C′D′, est perpendiculaire à chacun des plans projetants de la ligne AB, et, par conséquent, à leur intersection AB.

Scholie. — La démonstration de cette réciproque suppose que les plans projetants de la droite AB ne coïnci-

dent pas, ce qui n'a lieu qu'autant que le plan (CD, C'D') n'est pas parallèle à la ligne de terre.

Dans l'hypothèse contraire, la droite AB est située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre et n'est plus déterminée par ses projections.

THÉORÈME V.

Si deux plans sont parallèles, leurs traces de même nom sont aussi parallèles.

Car les intersections de deux plans parallèles par un plan quelconque sont des droites parallèles.

Scholie. — La réciproque de ce théorème est vraie et évidente si les plans rencontrent la ligne de terre.

Au contraire, lorsque les plans donnés sont parallèles à la ligne de terre, ils peuvent se rencontrer suivant une droite parallèle à la ligne de terre, ou bien être parallèles l'un à l'autre. On reconnaît que les plans sont parallèles aux conditions suivantes :

1° Leurs traces verticales sont placées, à l'égard de la ligne de terre, dans le même ordre que leurs traces horizontales.

2° Les distances des traces verticales à la ligne de terre sont directement proportionnelles aux distances des traces horizontales à la même droite.

En effet (fig. 11), soient deux plans (AB, A'B') et (CD, C'D') parallèles l'un à l'autre et à la ligne de terre : leurs traces satisfont évidemment à la première des conditions énoncées ci-dessus. Pour démontrer qu'elles satisfont aussi à la seconde, je coupe les plans donnés par un plan EOE' perpendiculaire à la ligne de terre : les inter-

sections EE′, FF′, sont parallèles, et les triangles semblables EOE′, FOF′, donnent la proportion

$$OE : OF :: OE' : OF'.$$

Réciproquement, lorsque deux plans (AB, A′B′) et (CD, C′D′) parallèles à la ligne de terre satisfont aux conditions précédentes, ils sont parallèles.

Car, si je trace encore le plan EOE′ perpendiculaire à la ligne de terre, les triangles EOE′, FOF′, ont un angle égal compris entre côtés proportionnels : donc les droites EE′, FF′, sont parallèles, et les angles AEE′, CFF′, dont les côtés sont parallèles chacun à chacun, sont situés dans des plans parallèles.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

1. Faire le tableau des six positions qu'un plan peut avoir par rapport aux plans de projection s'il est parallèle à l'un d'eux.

2. Faire le tableau des quatre positions qu'un plan peut avoir relativement aux plans de projection lorsqu'il les rencontre l'un et l'autre et qu'il est parallèle à la ligne de terre.

3. Les projections d'une ligne droite et les traces d'un plan étant données, reconnaître si la droite est située dans le plan, parallèle au plan, ou si elle le rencontre. — Dans l'hypothèse de l'intersection de la droite et du plan, la droite est-elle oblique ou perpendiculaire au plan ?

CHAPITRE IV.

Construction des traces d'un plan d'après certaines données.

PROBLÈME I.

Construire les traces du plan de deux droites concourantes ou parallèles dont les projections sont données.

Ce plan a pour trace horizontale la droite qui passe par les traces horizontales des deux lignes données, et pour trace verticale la droite qui joint les traces verticales des mêmes lignes.

L'épure, que je ne fais qu'indiquer, offre une vérification : les deux traces du plan doivent être parallèles à la ligne de terre ou la rencontrer au même point.

Scholie. — Pour déterminer les traces du plan, on peut remplacer l'une quelconque des lignes droites données par toute autre droite qui les rencontre.

Cette remarque est d'une grande utilité pour la résolution de quelques cas particuliers de ce problème.

PROBLÈME II.

Construire les traces du plan déterminé par un point et une ligne droite dont les projections sont données.

Je mène par le point donné une ligne droite qui soit parallèle à la droite donnée ou qui la rencontre en un point

quelconque, et le problème est ramené au précédent, parce que la seconde droite est située dans le plan cherché.

PROBLÈME III.

Construire les traces du plan déterminé par trois points A, B, C, *qui ne sont pas en ligne droite et dont les projections sont données.*

Je trace les projections des droites AB, BC, CA, qui sont toutes trois dans le plan cherché, et le problème est ramené à construire les traces du plan des deux droites AB, BC.

La solution est soumise à cette vérification, que le plan doit contenir la troisième droite CA.

PROBLÈME IV.

Les projections de deux lignes droites AB *et* CD *étant données, construire les traces d'un plan parallèle à la droite* AB *et passant par la droite* CD.

Par un point quelconque de la droite CD je mène une droite EF, parallèle à AB, et je construis les traces du plan déterminé par les deux lignes droites CD et EF.

Scholie. — Ce problème est indéterminé si les droites données sont parallèles.

PROBLÈME V.

Les projections de deux lignes droites et celles d'un point étant données, construire les traces d'un plan parallèle aux deux droites et passant par le point.

Menez par le point donné des parallèles aux deux

droites données, et construisez les traces du plan de ces parallèles.

Scholie. — Ce problème est indéterminé lorsque les droites données sont parallèles.

PROBLÈME VI.

Les traces d'un plan et les projections d'un point étant données, construire les traces d'un plan parallèle au plan donné et passant par le point.

Tracez les projections d'une ligne droite quelconque située dans le plan donné, et menez par le point donné une parallèle AB à cette droite. Les traces du plan cherché sont respectivement parallèles à celles du plan donné et passent par les traces de la droite AB.

Scholie. — Lorsque le plan donné rencontre la ligne de terre, la construction précédente peut être simplifiée en prenant la droite AB parallèle à l'une des traces du plan donné : car, l'une des traces du plan demandé étant construite, l'intersection de cette droite et de la ligne de terre déterminera un point de l'autre trace.

PROBLÈME VII.

Les projections d'une ligne droite et celles d'un point étant données, construire les traces d'un plan perpendiculaire à la droite et passant par le point.

Lorsque le point est situé sur la ligne de terre, le plan cherché a pour traces les perpendiculaires menées par ce point sur les projections de la droite donnée.

Si le point se trouve hors de la ligne de terre, tracez, par un point quelconque de cette droite, un plan perpen-

diculaire à la droite donnée, et conduisez par le point donné un plan parallèle au plan précédent.

PROBLÈME VII.

Les projections d'une ligne droite et les traces d'un plan étant données, construire les traces d'un second plan perpendiculaire au premier et passant par la droite donnée.

Menez, par un point quelconque de la droite, une perpendiculaire au plan donné, et construisez les traces du plan des deux droites.

Scholie. — Le problème est indéterminé lorsque la droite est perpendiculaire au plan donné.

CHAPITRE V.

De la transformation des projections.

Dans tout problème de géométrie descriptive, la position des données par rapport aux plans de projection peut avoir une grande influence sur la simplicité de la solution. Aussi, lorsqu'on veut résoudre une question quelconque, il faut commencer par chercher, relativement aux plans de projection, une position des données qui conduise à une solution immédiate, et, cette position une fois trouvée, y ramener les données de la question par un déplacement de la figure ou par le changement des plans de projection.

On ne peut formuler aucune règle générale pour trouver, dans chaque question, cette position relative des données et des plans de projection, qui conduit à une solution évidente. Dans cette recherche, tout dépend de l'examen plus ou moins approfondi qu'on fait de la question, pour saisir la dépendance réciproque des inconnues et des données. Mais, lorsque cette difficulté est surmontée, la seconde partie de la résolution de la question, c'est-à-dire le déplacement de la figure ou le changement des plans de projection, s'effectue au moyen d'un petit nombre d'opérations graphiques, toujours les mêmes, qui constituent ce que j'appelle la *transformation des projections*.

C'est M. *Th. Olivier* qui a donné un caractère scien-

tifique aux idées exposées dans ce chapitre, en les réunissant sous un titre particulier dans son remarquable *Traité de géométrie descriptive*, et en en faisant la base d'une méthode de résolution des questions relatives à la géométrie dans l'espace.

Le déplacement d'une figure quelconque par rapport aux plans de projection s'opère par des mouvements de rotation autour d'axes qu'on prend ordinairement perpendiculaires à ces plans. Aussi la transformation des projections consiste dans la résolution des deux problèmes suivants :

1° *Les projections d'une figure sur deux plans rectangulaires étant données, construire la projection de cette figure sur un troisième plan.*

2° *Les projections d'une figure sur deux plans rectangulaires étant données, faire tourner cette figure, d'un angle donné, autour d'un axe quelconque, et construire les projections de cette figure sur les mêmes plans, après sa rotation.*

La solution de ces problèmes que je vais exposer ne dépend que des principes relatifs aux projections d'un point et à la lecture d'une épure. Je désignerai les projections d'un point, après un changement de plan ou une rotation, par les mêmes lettres qu'auparavant, mais je donnerai à ces lettres un indice égal au nombre des rotations ou des changements de plans déjà effectués. Ainsi, la droite L_1T_1 est la ligne de terre correspondant à un changement, et les points a_1, a'_1, sont les projections du point A de l'espace après un changement de plan ou une rotation.

I. — CHANGEMENT DES PLANS DE PROJECTION.

PROBLÈME I.

Les projections d'un point M *sur deux plans rectangulaires étant données, changer l'un des plans de projection, en conservant l'autre, et construire les nouvelles projections du point.*

Soient m et m' (fig. 12) les projections du point M sur les plans rectangulaires dont l'intersection est la droite LT. Je suppose que, le plan horizontal restant le même, le plan vertical soit changé, et que la droite L_1T_1 soit la nouvelle ligne de terre.

D'après la disposition des lettres L_1, T_1, la partie supérieure du nouveau plan vertical est rabattue sur la portion L_1LT_1 de l'épure, et le point M se trouve encore dans l'angle dièdre antérieur-supérieur formé par le plan horizontal et le nouveau plan vertical : car il est, par hypothèse, au-dessus du plan horizontal, et sa projection horizontale m, qui n'a pas changé, est en avant de la ligne de terre L_1T_1. Pour construire la nouvelle projection verticale m'_1 du point M, je remarque qu'elle doit être, sur la partie supérieure du plan vertical, à une distance de la nouvelle ligne de terre L_1T_1 égale à la distance du point M au plan horizontal, c'est-à dire à la distance $m'a$ de la première projection verticale m' à la première ligne de terre LT. Donc, si je trace, par le point m, la perpendiculaire ma_1 à la ligne de terre L_1T_1, et que je prenne sur le prolongement de cette droite la distance $a_1m'_1$ égale à am', le point m'_1 est la nouvelle projection verticale de M.

Scholie I. — Au lieu de prendre directement la longueur $a_1 m'_1$ égale à am', je puis déterminer le point m'_1 par une série de constructions qui lient sa position à celle du point m.

Pour cela, je trace par le point b, où se rencontrent les deux lignes de terre, la droite bb' perpendiculaire à LT, et la droite bb_1 perpendiculaire à L_1T_1 : ces droites sont les projections verticales de l'intersection des deux plans verticaux de projection. Je détermine d'abord sur bb' une longueur bc' égale à $m'a$, en menant $m'c'$ parallèle à LT. Je reporte ensuite cette longueur bc' sur la droite bb'_1, en décrivant, du point b comme centre, avec le rayon bc', l'arc de cercle $c'c'_1$; puis je trace la droite $c'_1m'_1$ parallèle à L_1T_1 et la droite ma_1 perpendiculaire sur la même ligne L_1T_1. L'intersection m'_1 de ces deux droites est le point cherché, puisque les quatre distances am', bc', bc'_1 et $a_1m'_1$ sont égales.

Scholie II. — Réciproquement, si la projection m'_1 était donnée, on retrouverait la projection m' par une construction qui serait l'inverse de la précédente.

PROBLÈME II.

Les projections ab, $a'b'$, d'une ligne droite AB *sur deux plans rectangulaires, étant données, changer l'un des plans de projection en conservant l'autre, et construire les nouvelles projections de la droite.*

Je suppose (fig. 13) que le plan horizontal soit seul changé, et que le nouveau système de plans de projection ait la droite L_1T_1 pour ligne de terre. La projection verticale $a'b'$ de la droite AB reste la même, puisque j'ai conservé le plan vertical. Pour construire sa nouvelle pro-

jection horizontale a_1b_1, je détermine les nouvelles projections horizontales a_1 et b_1 de deux points quelconques A et B de cette droite, puis je les joins par une ligne droite qui est la projection de AB sur le nouveau plan horizontal.

Scholie I. — Lorsque la trace c' de la droite AB sur le plan de projection que l'on conserve est comprise dans les limites de l'épure, il faut la prendre pour l'un des points A et B, parce que sa nouvelle projection c_1 est située sur la nouvelle ligne de terre L_1T_1.

Scholie II. — Souvent il suffit, dans une question, de connaître la trace D de la droite AB sur le nouveau plan de projection. On la détermine *a priori* par cette considération, que c'est le point dont l'une des projections est l'intersection d' de la nouvelle ligne de terre et de la projection $a'b'$ de la droite donnée sur le plan que l'on conserve.

PROBLÈME III.

Les traces AB, A'B', *d'un plan sur deux plans rectangulaires, étant données, changer l'un des plans de projection en conservant l'autre, et construire les nouvelles traces du plan.*

Je change seulement le plan vertical de projection, et (fig. 14) soit L_1T_1 la nouvelle ligne de terre. Puisque je conserve le plan horizontal, la trace horizontale du plan donné n'est pas changée. Pour construire sa nouvelle trace verticale, je détermine les traces g'_1, h'_1, de deux droites quelconques CD, EF, de ce plan sur le nouveau plan vertical, et je les joins par la droite $A'_1B'_1$, qui est la trace cherchée.

Scholie I. — Les droites CD, EF, peuvent être parallèles à la trace AB, qui n'est pas changée.

Scholie II. — Les droites AB, $A'_1B'_1$, doivent concourir au même point de la ligne de terre L_1T_1 ou être parallèles à cette ligne, puisqu'elles sont les traces d'un même plan. Il résulte de là 1° que, si la trace AB que l'on conserve rencontre la nouvelle ligne de terre dans les limites de la feuille de dessin, on peut ne prendre qu'une seule ligne droite du plan pour construire la nouvelle trace de ce plan, parce qu'on connaît déjà un point de cette trace, celui de son intersection avec la ligne de terre; 2° que la même simplification est applicable au cas dans lequel la droite AB est parallèle à la nouvelle ligne de terre, parce que la direction de la nouvelle trace du plan est connue : cette droite est parallèle à la ligne L_1T_1.

Scholie III. — Si les deux lignes de terre se rencontrent, comme dans l'épure ci-jointe, on peut encore abréger la construction précédente en remplaçant la détermination des traces d'une droite du plan donné par la recherche des projections du point d'intersection des traces de ce plan sur les deux plans verticaux.

Ce point a pour projection horizontale le point m, où se rencontrent les deux lignes de terre, sa projection sur le premier plan vertical est l'intersection m' de la trace A'B' du plan donné et de la perpendiculaire mm' à la ligne de terre LT. En construisant, par le procédé ordinaire, la projection m'_1 du point (m, m') sur le second plan vertical, on détermine un point de la trace inconnue $A'_1B'_1$ du plan donné.

II. — *ROTATION D'UNE FIGURE AUTOUR D'UN AXE PERPENDICULAIRE A L'UN DES PLANS DE PROJECTION.*

PROBLÈME I.

Les projections d'un axe vertical AB *et celles d'un point* M *étant données, faire tourner le point, d'un angle donné, autour de l'axe, et construire les projections de sa nouvelle position.*

Soient *m* et *m'* (fig. 15) les projections du point M, *a* et *a'* celles du pied A de l'axe vertical AB, dont la projection verticale *a'b'* est perpendiculaire à la ligne de terre et passe par le point *a*.

Lorsque le plan déterminé par l'axe AB et le point M tourne autour de AB, la droite M*m*, qui est parallèle à l'axe de rotation, engendre une surface cylindrique de révolution dont les points M, *m*, décrivent simultanément des parallèles égaux. Dans ce mouvement, le point *m* ne cesse pas d'être la projection horizontale de M, puisque la droite M*m* est constamment parallèle à l'axe AB.

Cela posé, si le point M tourne d'un angle V autour de l'axe AB, c'est-à-dire s'il parcourt sur son parallèle un arc qui ait la même mesure que l'angle V, sa projection horizontale *m* tourne aussi d'un angle égal à V et dans le même sens que le point M. Donc, pour construire cette projection, il faut tracer du point *a* comme centre, avec le rayon *am*, une circonférence de cercle, et faire sur la droite *am*, dans le sens du mouvement de M, un angle mam_1 égal à V. L'extrémité m_1 du rayon am_1 est la projection horizontale de la nouvelle position du point M.

Pour déterminer l'autre projection, j'observe que le

plan du parallèle décrit par le point M est horizontal, et que, par conséquent, la distance du point M au plan horizontal de projection est constante pendant le mouvement et égale à la distance $m'c$ de la première projection verticale m' à la ligne de terre. Donc la projection verticale m'_1 de la nouvelle position de M est l'intersection de la parallèle menée par le point m' à la ligne de terre et de la perpendiculaire tracée par le point m_1 sur la même droite LT.

Scholie I. — On construit de même les projections d'un point qu'on a fait tourner d'un certain angle autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical.

Scholie II. — Réciproquement, si les projections m_1, m'_1, de la seconde position du point M, étaient données, on retrouverait les projections m et m' de la position primitive de M en faisant tourner ce point, du même angle V, en sens contraire du premier mouvement de rotation.

PROBLÈME II.

Les projections d'un axe vertical AB *et celles d'une ligne droite* CD *étant données, faire tourner cette droite, d'un angle donné, autour de l'axe, et construire les projections de sa nouvelle position.*

Lorsque la droite CD, que je suppose liée d'une manière invariable à l'axe vertical AB, tourne d'un certain angle V autour de AB, elle engendre une surface de révolution, et tous ses points tournent du même angle V autour du même axe AB. Donc, pour construire les projections de la droite CD après sa rotation, il suffit de déterminer les projections de deux points quelconques M et N

de cette ligne, et de joindre par des droites les projections de même nom de ces points.

On simplifie beaucoup cette construction en prenant sur la droite CD (fig. 16) deux points M et N également éloignés de l'axe AB, parce que les parallèles de la surface de révolution décrits par ces points sont égaux, et ont, par suite, la même projection horizontale. Donc les projections horizontales *m* et *n* des points M et N sont les intersections de la projection horizontale *cd* de la droite CD et d'une circonférence de cercle décrite du point *a*, comme centre, avec un rayon quelconque. Les points *m* et *n* étant ainsi déterminés, on achève facilement la construction.

Scholie I. — Si la circonférence de cercle *am* (fig. 17) est tangente à la droite *cd*, le point de contact *m* est la projection horizontale du point de la droite CD le plus rapproché de l'axe. Lorsqu'on fait tourner ce point d'un angle mam_1 égal à l'angle donné, la droite CD reste à la même distance de l'axe AB: donc sa projection horizontale *cd* est constamment tangente au cercle *am*, et, pour la construire après la rotation, il suffit de tracer la perpendiculaire à m_1e_1 l'extrémité du rayon am_1.

On détermine ensuite la projection horizontale d'un autre point de la droite CD, par exemple de C, en prenant sur la tangente m_1e_1, dans un sens indiqué par le mouvement et les positions relatives des points M et C, la distance m_1c_1 égale à *mc*. On construit ensuite, par le procédé ordinaire, les nouvelles projections verticales des points M et C.

Dans beaucoup de problèmes cette construction est préférable à la précédente.

Scholie II. — Lorsque la droite CD (fig. 18) rencontre l'axe AB, par exemple au point B, ce point est immobile pendant le mouvement de la droite CD : donc ses projections ne sont pas changées, et il suffit de déterminer celles d'un autre point de la droite CD pour construire les projections (c_1d_1, $c'_1d'_1$) de cette ligne.

Si la droite CD (fig. 19) est parallèle à l'axe AB, elle conserve cette direction dans son mouvement : donc, en faisant tourner de l'angle donné V sa trace horizontale C, et menant par la nouvelle position de ce point une parallèle à l'axe, on détermine les projections (c_1d_1, $c'_1d'_1$) de la droite CD après sa rotation.

PROBLÈME III.

Les projections d'un axe vertical AB, *et les traces* CD, C′D′, *d'un plan, étant données, faire tourner, d'un angle donné* V, *le plan autour de l'axe, et construire ses traces dans sa nouvelle position.*

Je suppose le plan invariablement lié à l'axe AB, et je le fais tourner autour de cette droite d'un angle égal à V. Dans ce mouvement, toutes les droites du plan tournent du même angle V autour de l'axe AB : donc, si l'on construit les traces de deux quelconques d'entre elles après leur rotation, la trace horizontale du plan sera déterminée par les traces horizontales de ces droites, et la trace verticale du même plan par les traces verticales des mêmes droites.

Scholie I. — Dans la figure 20, le plan donné rencontre l'axe, puisqu'il n'est pas vertical. Au lieu de faire tourner deux droites quelconques de ce plan, j'ai pris de

préférence sa trace horizontale CD et une droite EF qui rencontre l'axe, parce que la projection verticale de CD coïncide avec la ligne de terre, et que la projection horizontale de EF passe par le point *a*.

Lorsque la droite EF est parallèle à la trace horizontale CD du plan, elle reste parallèle à cette ligne pendant tout son mouvement.

Scholie II. — Si le plan donné est vertical, c'est-à-dire parallèle à l'axe AB (fig. 21), il conserve cette direction dans son mouvement : donc il suffit de faire tourner sa trace horizontale, et de mener, par le point où elle rencontre la ligne de terre, une perpendiculaire à cette droite pour avoir la trace verticale.

PROBLÈME IV.

Les projections d'une ligne droite AB *qui rencontre le plan vertical de projection étant données, déplacer le plan vertical ou la droite de telle sorte qu'ils deviennent parallèles.*

1° Je change de plan vertical (fig. 22), et je prends pour nouvelle ligne de terre une droite quelconque L_1T_1 qui soit parallèle à la projection horizontale *ab* de la droite donnée. Le nouveau plan vertical est alors parallèle à la droite AB.

2° Je prends un axe vertical quelconque CD (fig. 23), et je fais tourner la droite AB autour de cet axe, jusqu'à ce que sa projection horizontale *ab* devienne parallèle à la ligne de terre. Alors la droite AB est parallèle au plan vertical.

La considération du point E de la droite AB le plus

proche de l'axe CD facilite beaucoup la construction, parce que la projection horizontale de AB est, après la rotation, tangente au cercle *ce*, et parallèle à la ligne de terre.

Scholie. — Lorsque, dans ce dernier procédé, l'axe de rotation est arbitraire, on simplifie la construction précédente en faisant passer cet axe par un point quelconque de la droite donnée.

PROBLÈME V.

Les projections d'une ligne droite AB *parallèle au plan vertical de projection étant données, déplacer le plan horizontal ou la droite de telle sorte qu'ils deviennent perpendiculaires l'un à l'autre.*

1° Je change de plan horizontal (fig. 24), et je prends la nouvelle ligne de terre L_1T_1 perpendiculaire à la projection verticale $a'b'$ de la droite AB. Le nouveau plan horizontal est alors perpendiculaire à la droite AB.

La nouvelle projection horizontale de AB est le point a_1 situé à une distance de la ligne de terre L_1T_1 égale à la distance de la droite AB au plan vertical.

2° Je prends (fig. 25) un axe DE perpendiculaire au plan vertical, et je fais tourner la droite AB autour de cet axe, jusqu'à ce que sa projection verticale $a'b'$ devienne perpendiculaire à la ligne de terre. Dans cette position, la droite AB est perpendiculaire au plan horizontal, et sa projection horizontale a_1 est située sur le prolongement de sa projection verticale $a'_1b'_1$.

Scholie. — Les deux problèmes précédents servent à rendre une droite quelconque perpendiculaire à l'un

des plans de projection. Cette question peut être résolue de quatre manières différentes : 1° par deux changements de plan ; 2° par un changement de plan et une rotation ; 3° par une rotation et un changement de plan ; 4° par deux rotations successives.

PROBLÈME VI.

Les traces AB, A′B′, *d'un plan oblique au plan vertical de projection, étant données, déplacer le plan vertical de projection ou le plan donné, de telle sorte qu'ils deviennent perpendiculaires l'un à l'autre.*

1° Je change de plan vertical (fig. 26), et je prends la nouvelle ligne de terre L_1T_1 perpendiculaire à la trace horizontale AB du plan donné. Le plan (AB, $A'_1B'_1$), qui passe par la droite AB perpendiculaire au nouveau plan vertical, est aussi perpendiculaire à ce plan de projection.

2° Je fais tourner le plan donné autour d'un axe vertical quelconque CD (fig. 27), jusqu'à ce que sa trace horizontale AB soit perpendiculaire à la ligne de terre. Le plan (A_1B_1, $A'_1B'_1$), ainsi déterminé, est perpendiculaire au plan vertical de projection.

Lorsque l'axe de rotation est arbitraire, on simplifie la construction précédente en prenant cet axe dans le plan vertical de projection, parce que le point *d′* est l'intersection de l'axe et de la trace verticale A′B′ du plan donné.

PROBLÈME VII.

Les traces AB, A′B′, *d'un plan perpendiculaire au plan vertical de projection, étant données, déplacer le plan donné ou le plan horizontal de projection, de telle sorte qu'ils deviennent parallèles.*

1° Je change de plan horizontal (fig. 28), et je prends la nouvelle ligne de terre L_1T_1 parallèle à la trace verticale A′B′ du plan donné. Ce plan est alors parallèle au nouveau plan horizontal, et n'a qu'une trace verticale, qui est A′B′ ou $A'_1B'_1$.

2° Je fais tourner le plan donné autour d'un axe CD (fig. 29), perpendiculaire au plan vertical de projection, jusqu'à ce que sa trace verticale A′B′ devienne parallèle à la ligne de terre. Dans cette position le plan donné est parallèle au plan horizontal, et a pour trace verticale la droite $A'_1B'_1$ parallèle à LT.

Scholie. — Les deux problèmes précédents servent à rendre un plan quelconque parallèle à l'un des plans de projection. Ce déplacement peut se faire de quatre manières différentes : 1° par deux changements de plan ; 2° par un changement et une rotation ; 3° par une rotation et un changement de plan ; 4° par deux rotations successives.

PROBLÈME VIII.

Les traces AB, AB′, *d'un plan, et les projections d'une figure sur deux plans rectangulaires, étant données, construire la projection de cette figure sur le plan donné* (AB, A′B′).

Si le plan donné est perpendiculaire à l'un des plans

de projection, par exemple au plan vertical, je le prends pour nouveau plan horizontal, et je détermine la projection de la figure sur ce plan.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si le plan (AB, A'B') n'est perpendiculaire à aucun des plans de projection, je le rends perpendiculaire à l'un d'eux, par exemple au plan vertical, et je le prends ensuite pour nouveau plan horizontal.

PROBLÈME IX.

Les projections d'une ligne droite AB *et celles d'une figure quelconque sur deux plans rectangulaires étant données, faire tourner cette figure autour de la droite* AB *comme axe, et construire sur les mêmes plans les projections de la figure donnée, après sa rotation.*

Si la droite AB est perpendiculaire à l'un des plans de projection, le problème est résolu par ce qui précède. Dans le cas contraire, je rends l'un des plans de projection perpendiculaire à la droite AB, je projette sur ce plan la figure donnée, et je la fais tourner autour de l'axe AB, d'un angle égal à l'angle donné. Les projections de sa nouvelle position sur les nouveaux plans étant déterminées, j'en conclus les projections de la même position sur les plans primitifs de projection.

Scholie générale sur la transformation des projections.

1° Lorsque, dans la solution d'un problème, on a recours à un changement de plan ou à une rotation, il faut avoir le soin de placer la nouvelle ligne de terre, ou l'axe de rotation, s'ils sont arbitraires, le plus loin possible des données, pour que les constructions relatives aux

déplacements de la figure soient séparées des données, et ne compliquent pas l'épure du problème, dont elles ne sont qu'une partie accessoire.

2° Si le problème proposé ne dépend que de la géométrie plane, il importe, pour la simplicité de la solution et de l'épure, que la construction des inconnues soit faite sur le plan même de la figure. Pour cela, on détermine d'abord les traces de ce plan lorsqu'elles ne sont pas données ; puis on rabat ce plan sur l'un des plans de projection, par exemple sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de sa trace horizontale. Pour effectuer les constructions relatives à cette rotation, il faut que l'axe, c'est-à-dire la trace horizontale du plan donné, soit perpendiculaire au plan vertical ; s'il en est autrement, on changera d'abord de plan vertical, et l'on prendra le nouveau plan vertical perpendiculaire à l'axe ; puis, on déterminera sur le plan horizontal les positions des données du problème, après le rabattement du plan qui les contient.

Lorsque la figure proposée sera ramenée dans le plan horizontal de projection, on construira les inconnues du problème ; puis on en déterminera les projections en relevant le plan donné, c'est-à-dire en le replaçant dans sa position primitive par un mouvement de rotation autour de sa trace horizontale. Je vais appliquer cette méthode, connue sous le nom de *Méthode des rabattements*, à la résolution du problème suivant :

PROBLÈME X.

Construire les projections du centre de la circonférence de cercle déterminée par trois points A, B, C, *qui ne sont pas en ligne droite et dont les projections sont données.*

Je construis (fig. 30) les traces MN, M'N', du plan déterminé par les trois points A, B, C. Les projections verticales a', b', c', de ces points, n'étant pas en ligne droite, le plan (MN, M'N') n'est pas perpendiculaire au plan vertical de projection, et, par conséquent, sa trace horizontale MN est oblique au même plan vertical.

Pour faire tourner le plan des points A, B, C, autour de la trace MN et le rabattre sur le plan horizontal, je prends un nouveau plan vertical perpendiculaire à l'axe MN. Soit $M'_1N'_1$ la nouvelle trace verticale du plan donné: cette droite passe par les nouvelles projections verticales a'_1, b'_1, c'_1, des points A, B, C; de sorte que, pour les construire, il suffit de mener, par les projections horizontales a, b, c, des perpendiculaires à la ligne de terre L_1T_1, jusqu'à la rencontre de $M'_1N'_1$.

Cela posé, je fais tourner le plan (MN, $M'_1N'_1$) autour de sa trace MN, jusqu'à ce que l'autre trace $M'_1N'_1$ s'applique sur la ligne de terre L_1T_1. Ce plan coïncide alors avec le plan horizontal, et les points A, B, C, coïncident respectivement avec leurs projections horizontales a_2, b_2, c_2. Le rabattement de la figure étant effectué, je détermine le centre o_2 de la circonférence du cercle qui passe par les points a_2, b_2, c_2, et sa projection o'_2 sur la ligne de terre L_1T_1; puis, je relève le plan (MN, $M'_1N'_1$) pour construire les projections o et o'_1 du centre dans le systè-

me de plans de projection dont la ligne de terre est L_1T_1, et, enfin, ses projections o, o', dans le système primitif.

Scholie. — Si les traces MN, M'N', du plan des trois points donnés, se trouvent hors des limites de l'épure, la construction précédente devra être modifiée.

Je changerai d'abord de plan horizontal, et je prendrai le second parallèle au premier, de telle sorte qu'il rencontre le plan (MN, M'N'), puis je ferai le rabattement autour de la nouvelle trace horizontale de ce plan.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

1. Construire les projections d'un hexagone régulier, les traces de son plan et les projections horizontales de deux sommets consécutifs étant données.

2. Construire les projections d'un polygone régulier inscrit dans un cercle dont on donne le plan, le centre et le rayon.

3. Les traces d'un plan et la projection horizontale d'un point de ce plan étant données, construire les projections du centre et la grandeur du rayon de la circonférence tangente aux deux traces du plan et passant par le point donné.

4. Par un point de la trace horizontale d'un plan mener une droite dans ce plan, de manière à ce qu'elle forme avec les traces du plan un triangle d'une aire donnée.

5. Les projections de trois points non en ligne droite étant données, construire les projections du centre et la grandeur du rayon du cercle inscrit dans le triangle dont les points donnés sont les sommets. — On déterminera les projections des points de contact de ce cercle et des côtés du triangle.

LIVRE II.

DES POLYÈDRES.

On distingue, dans la géométrie descriptive, deux espèces de corps : 1° les corps dont les faces sont planes et qu'on appelle *polyèdres ;* 2° ceux qui sont terminés par des *surfaces courbes* de forme quelconque. Je conserverai cette division dans ces leçons, et je traiterai d'abord ce qui est relatif aux polyèdres.

On représente, en géométrie descriptive, un polyèdre par les projections de ses sommets et de ses arêtes.

Pour déduire de ces données un mode de construction du polyèdre, il faut d'abord déterminer les longueurs des arêtes, les angles que ces droites forment entre elles, et les inclinaisons mutuelles des faces adjacentes. On construit ensuite toutes ces faces sur un même plan, en les juxtaposant dans l'ordre de leur liaison. Cette dernière épure représente le *développement* de la surface du polyèdre sur un plan, et fait connaître à l'artiste qui veut reproduire ce corps non seulement la forme et la grandeur de ses faces, mais encore l'ordre dans lequel il doit les assembler.

De là résultent trois problèmes généraux, qui, avec celui des intersections des droites et des plans, constituent toute la partie de la géométrie descriptive relative aux polyèdres. Ces problèmes sont :

1° La détermination des distances ;

2° La construction des angles formés par des lignes droites ou des plans ;

3° Le développement de la surface d'un polyèdre, ou d'une portion de cette surface, déterminée par l'intersection de ce polyèdre et d'autres polyèdres quelconques.

CHAPITRE I.

Intersection de deux plans, d'une ligne droite et d'un plan.

PROBLÈME I.

Construire les projections de l'intersection de deux plans dont les traces de même nom se rencontrent.

Soient AB, A′B′ (fig. 31), les traces de l'un des plans, et CD, C′D′, les traces de l'autre. La ligne d'intersection de ces plans a pour trace horizontale le point *f*, où se rencontrent leurs traces horizontales AB, CD, et pour trace verticale le point *e*′, où se rencontrent leurs traces verticales A′B′, C′D′. Donc la question est ramenée à construire les projections de la droite qui passe par les deux points *e*′ et *f*.

Je projette le point *f* sur le plan vertical, le point *e*′ sur le plan horizontal, et les droites *ef*, *e*′*f*′, sont les projections de la ligne d'intersection des deux plans donnés.

Scholie. — Cette construction n'est plus applicable 1° lorsque les points *e*′ et *f*′ se trouvent hors des limites de l'épure ; 2° lorsque ces points sont situés sur la ligne de terre. Je vais examiner successivement ces deux cas particuliers :

1° *Construire les projections de la ligne d'intersection de deux plans* (AB, A′B′) *et* (CD, C′D′), *dont les traces de même nom se rencontrent hors de l'épure.*

Je détermine d'abord (fig. 31) la direction de l'intersection EF des deux plans donnés, en menant, par un point de la ligne de terre, et parallèlement au plan (AB, A′B′), un plan (GH, G′H′) tel que les traces de la droite suivant laquelle il rencontre le plan (CD, C′D′) soient comprises dans les limites de l'épure. Cette droite, dont les projections sont *mn* et *m′n′*, est parallèle à l'intersection EF des plans donnés.

Pour construire ensuite un point de chacune des projections de EF, j'observe que, de la similitude des triangles A*ef*, H*mn*, et de celle des triangles D*ef*, D*mn*, résultent les proportions

$$Ae : Hm :: ef : mn,$$
$$De : Dm :: ef : mn;$$

et, par conséquent, la suivante:

$$Ae : Hm :: De : Dm.$$

Donc le point *e* divise la droite AD en deux segments directement proportionnels aux lignes H*m*, D*m*. Je prouverais de même que le point *f′* divise aussi la droite AD en deux segments directement proportionnels aux lignes H*n′*, D*n′*. Par conséquent, si je détermine les points *e*, *f′*, par ces conditions, et que je trace la droite *ef* parallèle à *mn* et la droite *e′f′* parallèle à *m′n′*, ces deux droites seront les projections de l'intersection EF des plans donnés.

2° *Construire les projections de l'intersection de deux plans* (AB, A′B′) *et* (CD, C′D′) *qui rencontrent la ligne de terre au même point*.

Je prends (fig. 32) un plan auxiliaire (GH, G′H′) qui soit parallèle au plan (AB, A′B′); je construis les projections *mn*, *m′n′*, de son intersection avec l'autre plan

(CD, C'D'), et par le point *e*, où les plans donnés rencontrent la ligne de terre, je trace la droite *ef* parallèle à *mn*, et la droite *e'f'* parallèle à *m'n'*. Ces deux lignes *ef*, *e'f'*, sont les projections de la droite suivant laquelle les deux plans donnés se rencontrent.

PROBLÈME II.

Construire les projections de l'intersection de deux plans dont les traces horizontales AB, CD, *sont parallèles, et les traces verticales* A'B', C'D', *se rencontrent.*

On démontre en géométrie (fig. 33) que les deux plans donnés qui passent par les droites parallèles AB et CD se rencontrent suivant une ligne droite parallèle à AB et CD. Donc, pour construire l'intersection de ces plans, il faut mener une parallèle à AB par le point (*m*, *m'*) où se coupent leurs traces verticales A'B', C'D'. Cette droite a sa projection horizontale *mn* parallèle à AB, et sa projection verticale *m'n'* parallèle à la ligne de terre.

PROBLÈME III.

Construire les projections de l'intersection de deux plans (AB, A'B') *et* (CD, C'D') *parallèles à la ligne de terre.*

Les plans donnés (fig. 34) étant parallèles à la ligne de terre, leurs traces et leurs intersections sont aussi parallèles à la droite LT. Je prends un nouveau plan vertical perpendiculaire à la ligne de terre, et, par conséquent, à la ligne d'intersection des plans donnés : donc cette droite a pour trace verticale le point g'_1, où se rencontrent les nouvelles traces verticales $A'_1B'_1$, $C'_1D'_1$, des

deux plans, et pour projection horizontale la droite gh, menée par le point g'_1 perpendiculairement à la nouvelle ligne de terre L_1T_1.

Pour tracer les projections de la même droite GH sur les plans primitifs de projection, je remarque : 1° que la projection horizontale de GH est encore la droite gh, puisque le plan horizontal n'a pas été changé ; 2° que la projection verticale est parallèle à la ligne de terre LT, et située au-dessus de cette ligne à une distance égale à gg'_1. Donc, si je prends sur L_1T_1, à partir du point de rencontre des deux lignes de terre, la longueur eg' égale à gg'_1, et que je mène, par le point g', la droite $g'h'$ parallèle à LT, les droites gh, $g'h'$, seront les projections de l'intersection des plans donnés.

Scholie. — Si l'on avait la proportion

$$em : en :: ef' : ee' :: ef'_1 : ee'_1,$$

les traces $A'_1B'_1$, $C'_1D'_1$, seraient parallèles, et les plans donnés ne se rencontreraient plus.

PROBLÈME IV.

Construire les projections de l'intersection de deux plans dont l'un passe par la ligne de terre et un point donné.

Soient (fig. 35) c, c', les projections du point C qui déterminent le plan passant par la ligne de terre, et AB, A'B', les traces de l'autre plan donné. Je mène, par le point C, un plan perpendiculaire à la ligne de terre, et je le prends pour nouveau plan vertical de projection ; alors la nouvelle ligne de terre L_1T_1, qui n'est autre que la trace horizontale de ce plan, passe par les projections du point C. Soient $B'_1A'_1$ et $L'_1T'_1$ les traces des plans donnés

sur le plan auxiliaire; je détermine les projections *de*, $d'_1e'_1$, de l'intersection de ces plans. Pour en déduire la projection de cette droite sur le premier plan vertical, je prends sur L_1T_1 la longueur e'_1d' égale à dd'_1, et je joins le point d' au point e' de rencontre des traces AB, A'B'.

PROBLÈME V.

Construire les projections du point d'intersection de trois plans dont les traces sont données.

Les lignes d'intersection des plans donnés, considérés deux à deux, passent par le point commun à ces plans : donc les projections horizontales de ces trois droites concourent au même point, qui est la projection horizontale du point cherché, et leurs projections verticales déterminent par leur rencontre la projection verticale du même point.

Scholie. — Ce problème est indéterminé lorsque les plans donnés passent par la même droite. Il est impossible si leurs lignes d'intersection sont parallèles.

PROBLÈME VI.

Construire les projections de l'intersection d'une ligne droite AB *et d'un plan* (CD, C'D').

Le point où la droite AB (fig. 36) traverse le plan (CD, C'D') est commun à ce plan et à tout plan passant par AB : donc, si je construis les projections de la droite EF suivant laquelle le plan donné est rencontré par l'un des plans projetants de la droite AB, par exemple par le plan projetant horizontalement cette ligne, le point cherché sera l'intersection (g, g') des droites AB et EF.

Scholie. — La construction précédente, dans laquelle on emploie l'un des plans projetants de la droite donnée, est en défaut lorsque cette droite se trouve dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre. Alors la droite AB peut être perpendiculaire à l'un des plans de projection, ou oblique à l'un et à l'autre. Je vais examiner successivement ces deux hypothèses.

1° *Intersection d'un plan* (CD, C'D') *et d'une ligne droite* AB *perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

Je suppose (fig. 37) la droite AB perpendiculaire au plan horizontal, et je mène par cette droite un plan quelconque (EF, E'F'); la trace horizontale EF de ce plan passe par le pied *a* de la droite AB, et sa trace verticale E'F' est perpendiculaire à la ligne de terre. Je construis ensuite les projections *gh*, *g'h'*, de l'intersection du plan donné et du plan auxiliaire : le point (*b*, *b'*) où cette droite rencontre la ligne donnée AB est l'intersection de AB et du plan (CD, C'D').

2° *Intersection d'un plan* (CD, C'D') *et d'une ligne droite située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre et déterminée par les points* A *et* B.

Je prends (fig. 38) pour nouveau plan vertical le plan qui, par hypothèse, est perpendiculaire à la ligne de terre et contient la ligne donnée. Alors la nouvelle ligne de terre L_1T_1 passe par les projections des points A et B. Soient $C'_1D'_1$ la trace du plan donné, et $a'_1b'_1$ la projection de la droite AB sur le plan vertical auxiliaire : l'intersection de AB et du plan (CD, C'D') n'est autre que l'intersection e'_1 des lignes $a'_1b'_1$ et $C'_1D'_1$, puisque la droite AB coïncide avec sa projection verticale $a'_1b'_1$. Donc les projections du

point cherché sur les plans primitifs de projection sont *e* et *e'*.

PROBLÈME VII.

Construire les projections de l'intersection d'une ligne droite AB *et d'un plan déterminé par trois points* C, D, E, *sans faire usage des traces du plan.*

Je conduis (fig. 39) le plan (MN, M'N') par la droite AB et l'un des points donnés, par exemple C; je détermine l'intersection H de ce plan et de la droite qui passe par les deux autres points donnés D,E, et je joins par une ligne droite le point H au point C.

La droite CH est l'intersection du plan donné et du plan (MN, M'N') : donc le point de rencontre P des lignes AB, CH, est le point où la droite AB perce le plan donné.

PROBLÈME VIII.

Construire les projections de l'intersection de deux plans dont les traces sont hors des limites de l'épure, l'un des plans étant déterminé par les points A, B, C, *et l'autre par les points* D, E, F.

Au moyen du problème précédent, je détermine les deux points d'intersection du premier plan et des droites DE, DF. La droite qui passe par ces deux points est la ligne suivant laquelle les plans donnés se rencontrent.

PROBLÈME IX.

Mener par un point donné A *une ligne droite qui rencontre deux lignes droites,* BC *et* DE, *non situées dans le même plan.*

La droite cherchée est l'intersection de deux plans dont

l'un passe par le point A et la droite BC, et l'autre par le même point A et la droite DE.

On peut abréger cette solution en ne construisant que le premier plan, en déterminant ensuite son intersection avec la droite DE, et en joignant ce point au point A par une ligne droite, qui rencontrera la droite AB lorsque le problème sera possible.

Scholie. — La première solution offre deux vérifications, puisque la ligne d'intersection des deux plans doit rencontrer chacune des droites AB et CD. Il en est de même de la seconde solution : car 1° le plan mené par le point A et la droite BC doit rencontrer DE; 2° la droite qui joint le point donné au point d'intersection du plan précédent et de la droite DE doit rencontrer BC.

PROBLÈME X.

Tracer une ligne droite qui soit parallèle à une droite donnée AB *et rencontre deux autres droites,* CD, EF, *non situées dans le même plan.*

La droite demandée est l'intersection de deux plans menés parallèlement à la droite AB, l'un par la droite CD, et l'autre par la droite EF.

Comme dans le problème précédent, on peut ne construire que l'un des plans, par exemple celui qui passe par la droite CD. On déterminera ensuite le point d'intersection de ce plan et de la droite EF, et l'on tracera par ce point une droite parallèle à la droite AB. Cette ligne rencontrera CD lorsque le problème sera possible.

Scholie. — Ce problème conduit à deux vérifications.

Il est impossible lorsque les trois droites données sont parallèles à un même plan.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

1. Construire les projections de l'intersection de deux plans ayant, chacun, leurs traces en ligne droite.

2. Construire les projections de l'intersection de deux plans dont l'un est parallèle au plan vertical de projection.

3. Construire les projections du point d'intersection d'un plan quelconque et d'une ligne droite parallèle à la ligne de terre.

4. Construire les projections du point d'intersection d'un plan quelconque et d'une ligne droite dont les projections sont en ligne droite.

5. Construire les projections du point d'intersection d'un plan dont les traces sont en ligne droite, et d'une droite située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

6. Les traces d'un plan et la projection verticale d'une droite située dans ce plan étant données, déterminer la projection horizontale de cette droite.

7. Les traces d'un plan et la projection verticale d'un point de ce plan étant données, construire la projection horizontale du point.

8. Les traces d'un plan étant données, construire les projections de l'intersection de ce plan et du plan bissecteur de chacun des angles dièdres que forment les plans de projection.

9. Construire les projections de l'intersection de deux plans respectivement perpendiculaires aux plans bissec-

teurs de deux angles dièdres adjacents, formés par les plans de projection.

10. Construire les projections de l'intersection d'une ligne droite dont les projections sont en ligne droite et d'un plan passant par la ligne de terre et un point donné.

CHAPITRE II.

Détermination des distances.

PROBLÈME I.

Les projections de deux points A *et* B *étant données, déterminer la distance de ces points, c'est-à-dire la longueur de la droite* AB *qui les joint.*

Rendez la droite AB parallèle à l'un des plans de projection, par exemple au plan vertical, et cette droite sera égale à sa nouvelle projection verticale.

Scholie.— Si, pour résoudre cette question, vous faites un changement de plan, prenez pour le nouveau plan vertical celui qui projette horizontalement la droite AB. Si vous avez recours à une rotation, choisissez pour axe l'une des deux verticales qui passent par les points A et B.

PROBLÈME II.

Les projections d'un point A, *et les traces* BC, B′C′, *d'un plan, étant données, déterminer la distance du point au plan.*

1re *Solution.* —Tracez, par le point A, une perpendiculaire au plan donné; déterminez ensuite le point d'intersection M de cette droite et du plan, et construisez la distance du point A au point M.

2ᵉ *Solution.* — Rendez vertical le plan donné : alors la perpendiculaire tracée du point A sur ce plan sera parallèle au plan horizontal de projection et égale à sa projection horizontale.

L'épure de cette solution du problème peut être faite de deux manières différentes : 1° en changeant de plan vertical ; 2° en faisant tourner le plan donné autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical. C'est ce dernier procédé que j'ai appliqué (fig. 40) ; j'ai pris un axe qui passe par le point A, afin que les projections de ce point ne changent pas dans le mouvement de rotation.

La perpendiculaire AM tracée du point A sur le plan (B_1C_1, $B'_1C'_1$) le rencontre au point (m_1, m'_1) : donc elle est égale à la droite am_1, qui est sa projection horizontale. En ramenant le plan donné à sa position primitive, je trouve les points *m* et *m'* pour les projections du point (m_1, m'_1), c'est-à-dire du pied de la perpendiculaire AM. L'épure offre deux vérifications, car la droite *am* doit être perpendiculaire à BC, et la droite *a'm'* à B'C'.

PROBLÈME III.

Les projections d'un point A *et celles d'une ligne droite* BC *étant données, déterminer* 1° *les projections de la perpendiculaire tracée du point sur la droite,* 2° *la distance du point à la droite.*

1ʳᵉ *Solution.* — Tracez, par le point A, un plan perpendiculaire à la droite BC ; déterminez ensuite le point d'intersection de ce plan et de la droite, et construisez la distance du point A au point M, car la droite AM est perpendiculaire à la droite BC.

2e *Solution.* — Construisez les traces du plan qui passe par le point A et la droite BC; rabattez ce plan sur l'un des plans de projection, et tracez, du point A, la perpendiculaire AM sur la droite BC. Cette construction étant faite, relevez le plan (A, BC) pour déterminer les projections de la perpendiculaire AM.

3e *Solution.* — Rendez verticale la droite donnée : alors la perpendiculaire tracée du point A sur cette droite sera parallèle au plan horizontal et se projettera en vraie grandeur sur ce plan.

L'épure de ce problème peut être faite de quatre manières différentes : 1° par deux changements de plan; 2° par deux rotations successives; 3° par une rotation et un changement de plan; 4° par un changement de plan et une rotation. C'est ce dernier procédé que j'ai employé (fig. 41). J'ai commencé par rendre la droite BC parallèle au plan vertical, en la faisant tourner autour de l'axe vertical qui passe par le point A. Ensuite j'ai mené par ce point un plan perpendiculaire à la droite BC, et j'ai pris ce plan pour nouveau plan horizontal, de sorte que la nouvelle ligne de terre L_2T_2 est perpendiculaire à la projection verticale $b'_1c'_1$ de BC, et passe par la projection verticale a' du point A.

La droite a_2m_2, qui joint le point A, ou sa nouvelle projection verticale a_2 avec laquelle il coïncide, à la nouvelle trace horizontale m_2 de la ligne BC, est la perpendiculaire cherchée. Pour construire les projections de cette droite sur les plans de projection primitifs, je trace : par le point m'_2, une perpendiculaire à LT jusqu'à la rencontre de b_1c_1 ; soit m_1 l'intersection de ces droites : les points m'_2, m_1, sont alors les projections du point M sur les pre-

miers plans de projection, la droite BC étant parallèle au plan vertical. En ramenant cette droite dans sa position (bc, $b'c'$), je trouve les points m' et m pour les projections du point M; par conséquent la perpendiculaire AM se projette sur les premiers plans de projection, suivant les droites am et $a'm'$.

PROBLÈME IV.

Déterminer la distance de deux plans parallèles dont les traces sont données.

Rendez les deux plans perpendiculaires à l'un des plans de projection, et leur distance est égale à celle de leurs traces sur ce plan de projection.

PROBLÈME V.

Les traces d'un plan et les projections d'une ligne droite parallèle à ce plan étant données, déterminer la distance de la droite et du plan.

Construisez la distance d'un point quelconque de la droite au plan.

PROBLÈME VI.

Déterminer la distance de deux lignes droites parallèles dont les projections sont données.

Construisez la distance d'un point quelconque de l'une des droites à l'autre.

PROBLÈME VII.

Les projections de deux lignes droites AB, CD, *non situées dans le même plan, étant données,* 1° *construire les*

projections de la perpendiculaire commune à ces droites, 2° déterminer leur plus courte distance.

1re *Solution.* — Par deux points quelconques E et F de la ligne de terre (fig. 42), menez deux plans, l'un perpendiculaire à la droite AB, et l'autre à la droite CD. Déterminez ensuite l'intersection GH de ces plans; cette droite est perpendiculaire à tout plan parallèle aux deux droites données : donc elle est parallèle à la perpendiculaire commune à ces droites. Par conséquent le problème est ramené à tracer parallèlement à GH une droite BC qui rencontre les deux droites AB et CD. La distance des points d'intersection B et C est égale à la plus courte distance des droites données.

2e *Solution.* — Construisez (fig. 43) un plan ABE parallèle à la droite CD et passant par la droite AB. Menez ensuite par la droite CD un plan perpendiculaire au plan ABE, et déterminez son point d'intersection M avec la droite AB, puis tracez par ce point la perpendiculaire MN au plan ABE.

Cette droite MN est perpendiculaire à AB et à l'intersection ME des deux plans : donc elle l'est aussi à la droite CD, parallèle à ME.

3e *Solution.* — Rendez verticale l'une des droites données, par exemple AB. Alors la perpendiculaire commune à ces droites sera parallèle au plan horizontal, et perpendiculaire au plan qui projette horizontalement l'autre droite CD : par conséquent elle se projettera en vraie grandeur sur le plan horizontal, et perpendiculairement à la projection horizontale de CD.

Cette épure peut être faite de quatre manières diffé-

rentes, comme celle du problème III de ce chapitre. Je me suis servi du procédé des deux changements de plans pour faire l'épure (fig. 44). J'ai pris d'abord pour nouveau plan vertical le plan qui projette horizontalement la droite AB ; j'ai mené ensuite, par la trace horizontale *a* de AB, un plan perpendiculaire à cette droite, et je l'ai choisi pour le nouveau plan horizontal : il en résulte que la nouvelle ligne de terre L_2T_2 est perpendiculaire à la projection verticale ab'_1 de AB, et passe par sa trace horizontale *a*.

La plus courte distance des deux lignes données a pour projection horizontale la droite an_2, perpendiculaire à la projection horizontale c_2d_2 de CD, et pour projection verticale la droite $m'_2n'_2$, parallèle à la ligne de terre L_2T_2; en outre, elle est égale à sa projection horizontale an_2.

Il est facile de voir que cette plus courte distance se projette sur les plans dont l'intersection est L_1T_1, suivant les droites $m'_2n'_2$, m_1n_1, et sur les plans primitifs, suivant les droites m_1n_1, $m'n'$.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

1. Déterminer la distance des traces d'une ligne droite dont les projections sont données.

2. Déterminer la plus courte distance des projections d'une ligne droite.

3. Mener un plan parallèle à un plan donné et à une distance donnée de ce plan.

4. Les traces d'un plan et la projection horizontale d'un point étant données, déterminer la projection verticale de ce point, de telle sorte qu'il soit à une distance du plan égale à une droite donnée.

5. Les projections d'une ligne droite et la projection horizontale d'une autre droite, parallèle à la première, étant données, construire la projection verticale de la seconde droite, la distance des deux parallèles étant donnée.

6. Les projections d'un point et celles d'une ligne droite étant données, mener, de ce point jusqu'à la rencontre de la droite, une ligne droite de longueur donnée.

7. Les projections d'une ligne droite et les traces d'un plan étant données, déterminer les projections du point de la droite dont la distance au plan est donnée.

8. Les projections de deux droites non situées dans un même plan étant données, déterminer les projections d'un point de l'une de ces droites, distant de l'autre droite d'une longueur donnée.

9. Déterminer la distance d'un point à une ligne droite, lorsque cette droite est située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

CHAPITRE III.

Construction des angles formés par des lignes droites et des plans.

PROBLÈME I.

Les projections de deux lignes droites AB *et* AC *qui se rencontrent étant données, construire l'angle* BAC *formé par ces droites.*

Construisez l'une des traces du plan déterminé par les droites AB, AC, par exemple sa trace horizontale, puis rabattez ce plan, et par suite l'angle BAC, sur le plan horizontal.

Comme (fig. 45) la trace horizontale *bc* du plan BAC, autour de laquelle le rabattement doit se faire, n'est pas perpendiculaire au plan vertical, j'ai changé de plan vertical et pris pour nouvelle ligne de terre la perpendiculaire L_1T_1, tracée par la projection horizontale *a* du point A sur la droite *bc*; par conséquent le nouveau plan vertical est perpendiculaire à *bc*, et passe par le point A, qui coïncide avec sa nouvelle projection verticale a'_1.

Après le rabattement du plan BAC sur le plan horizontal, le sommet A de l'angle cherché se trouve au point a'_2 de la ligne de terre L_1T_1, et ses côtés passent encore par les traces *b* et *c* des droites AB et AC. Donc l'angle ba'_2c n'est autre que l'angle BAC.

Dans cette épure la droite da'_1 est généralement plus grande que *da:* donc l'angle BAC est moindre que sa projection *bac*. Le contraire a lieu lorsque l'un des côtés de l'angle est parallèle à l'un des plans de projection : ainsi l'angle A*bc* est plus grand que sa projection *abc*.

Scholie I. — Si deux traces de même nom des droites AB, AC, ne sont pas comprises dans les limites de l'épure, il faut prendre un nouveau plan horizontal parallèle au premier et tel que les droites données le rencontrent dans la feuille de dessin, puis faire la construction de l'angle comme dans l'exemple précédent.

Scholie II. — Si l'une des droites données, par exemple AC, est parallèle au plan horizontal, sa projection verticale *a'c'* sera parallèle à la ligne de terre LT, et les deux droites *bc*, a'_2c, seront parallèles à sa projection horizontale *ac*.

Scholie III. — Pour déterminer l'angle qui semblent former deux droites non situées dans le même plan, il faut mener, par un point quelconque de l'espace, des parallèles à ces deux lignes, et construire leur angle.

PROBLÈME II.

Les projections de deux lignes droites AB, AC, *qui se rencontrent, étant données, construire les projections de la bissectrice de l'angle* BAC *formé par ces droites.*

Je rabats (fig. 46) le plan de l'angle BAC sur le plan horizontal; pendant ce mouvement, la trace horizontale de la bissectrice de cet angle reste fixe, puisqu'elle se trouve sur la trace horizontale *be* du plan BAC, c'est-à-dire sur l'axe de rotation. Donc ce point est l'intersection *e*

de la droite bc et de la bissectrice de l'angle rabattu ba'_2c. Le problème est alors ramené à construire les projections de la droite qui passe par le point e et le sommet A de l'angle donné.

PROBLÈME III.

Les projections d'une ligne droite et les traces d'un plan étant données, construire l'angle de la droite et du plan, c'est-à-dire l'angle que cette droite forme avec sa projection sur le plan donné.

D'un point quelconque de la droite donnée, tracez une perpendiculaire au plan donné, et construisez l'angle de ces deux droites : c'est le complément de l'angle cherché.

Corollaire. Si le plan donné est l'un des plans de projection, par exemple le plan horizontal, la construction précédente se réduit à rabattre sur le plan vertical le plan qui projette horizontalement la droite donnée.

En effet (fig. 47), soit à construire l'angle que la droite AB fait avec le plan horizontal. Je rabats le plan abb' sur le plan vertical, en le faisant tourner autour de sa trace verticale bb'. La droite AB prend alors la position a_1b', et fait avec la ligne de terre un angle $b'a_1b$ égal à l'angle cherché.

Dans l'angle trièdre qui a pour arêtes les droites $b'a$, $b'a'$, $b'b$, la face $a'b'a$, opposée à l'angle dièdre aigu bb', est moindre que la face $ab'b$, opposée à l'angle dièdre droit $a'b'$: donc la somme des angles $a'b'a$, $b'ab$, que la droite AB fait avec les plans de projection, est moindre que la somme des angles aigus $a_1b'b$, $b'a_1b$, du triangle rectangle $a_1b'b$, c'est-à-dire moindre qu'un angle droit.

Lorsque la droite AB est située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, la droite *b'a'* coïncide avec *b'b*, et la somme des angles *a'b'a*, *b'ab*, est égale à un angle droit.

PROBLÈME IV.

Les traces AB, A'B,' *et* CD, C'D', *de deux plans, étant données, construire l'angle rectiligne de l'un des angles dièdres formés par ces plans.*

Ire *Solution.* — D'un point quelconque de l'espace, tracez des perpendiculaires aux deux plans donnés et construisez l'angle de ces deux droites. Cet angle a la même mesure que l'angle dièdre proposé ou que son supplément.

IIe *Solution.* — Rendez verticale la ligne d'intersection des deux plans donnés. Alors ces plans seront perpendiculaires au plan horizontal de projection, et leurs traces horizontales formeront l'angle rectiligne cherché.

Cette épure peut être faite de quatre manières différentes : 1° par deux changements de plans; 2° par deux rotations successives; 3° par une rotation et un changement de plan; 4° par un changement de plan et une rotation. C'est ce dernier procédé que j'ai appliqué (fig. 48). J'ai pris d'abord pour nouveau plan vertical le plan qui projette horizontalement l'intersection *ef'* des plans donnés, de sorte que ces plans ont pour nouvelle trace verticale leur intersection elle-même ef'_1. J'ai choisi ensuite pour l'axe de rotation la droite fh_1, perpendiculaire à la nouvelle ligne de terre L_1T_1 dans le plan horizontal, et j'ai fait tourner les deux plans autour de cette droite jusqu'à ce que

leur intersection ef'_1 soit verticale. Alors ces plans ont pour trace verticale la droite $g'_2f'_2$, et pour traces horizontales les droites g'_2h_1, g'_2m_1, qui forment l'angle rectiligne cherché. On peut ne pas construire la trace verticale $g'_2f'_2$ des plans donnés, lorsqu'on ne cherche que l'angle rectiligne $h_1g'_2m_1$ de leur angle dièdre.

Corollaire. Si l'un des plans donnés est un plan de projection, la construction précédente se simplifie beaucoup, car elle se réduit à rendre l'autre plan donné perpendiculaire au second plan de projection.

En effet (fig. 49), soit à construire l'angle que le plan (AB, A'B') fait avec le plan horizontal. Je ramène ce plan à être perpendiculaire au plan vertical, en le faisant tourner autour d'un axe vertical cc' situé dans le plan vertical de projection. L'angle que la nouvelle trace verticale $A'_1B'_1$ fait avec la ligne de terre LT est le rectiligne de l'angle dièdre proposé.

La somme des trois angles dièdres de l'angle trièdre qui a pour arêtes les droites AB, A'B' et LT est plus grande que deux angles dièdres droits; or l'angle dièdre LT est droit : donc la somme des angles dièdres aigus AB, A'B', que le plan donné fait avec les plans de projection, est plus grande qu'un angle dièdre droit. Ces deux angles sont complémentaires lorsque le plan donné est parallèle à la ligne de terre.

Scholie. — La *pente* d'une ligne droite ou d'un plan est l'inclinaison de cette droite ou de ce plan sur l'horizon. On appelle *ligne de pente* d'un plan toute droite menée dans ce plan perpendiculairement à sa trace horizontale, parce que la droite et le plan ont la même inclinaison sur tout plan horizontal.

Lorsque la droite AB est située dans u[...], car il
diculaire à la ligne de terre, la droite b'[...] horizon-
b'b, et la somme des angles a'b'a, [...]ntale de la
angle droit.

PROBLÈM[E]

Les traces AB, A'B,' *et* CD [...] *plans, étant données, construire l'a*[...]*ecteur de l'un dièdres formés par ce*[...]

[...]ent, je ramène (fig. 50),

Ire *Solution.* — D'[...] une rotation, les plans don-
cez des perpendic[...] au plan horizontal. *Soient alors*
struisez l'angle [...]aces horizontales de ces plans, et $g'_2f'_2$
mesure que [...] *verticale* commune : le plan bissecteur de l'an-
ment. [...] *trace* $h_1g'_2f'_2m_1$ passe par la droite $g'_2f'_2$, et *sa trace*

IIe *Sol*[...] *dièdre* [...] g'_2n_2 divise en deux parties égales l'angle
des de[...] *horizontale* [...] *rectiligne* $h_1g'_2m_1$ de cet angle dièdre. Pour construire les
cula[...] *traces de ce* plan sur les plans de projection primitifs, *il faut*
ho[...] *remarquer* que sa trace horizontale passe par le point *e* d'in-
tersection des traces horizontales AB, AC, des plans don-
nés, et par le point n_2, où la droite g'_2n_2 rencontre l'axe
de rotation h_1m_1. Quant à sa trace verticale, elle est dé-
terminée par l'intersection f' des traces verticales A'B',
C'D', et par le point *r*, où la trace horizontale en_2 ren-
contre la ligne de terre LT.

PROBLÈME VI.

Construire les traces du plan qui passe par une droite donnée AB, *et fait, avec le plan horizontal, un angle donné* V.

Soient (fig. 51) CD, C'D', les traces du plan cherché. Je

lan à être perpendiculaire au plan vertical de
faisant tourner autour de l'axe vertical bb' :
icale e_1b' fait, avec la ligne de terre,
l'angle donné V, et la distance be_1
orizontale e_1D_1 est égale à la di-
trace horizontale primitive CD.
ion suivante des traces CD,
la droite bb', un angle $bb'e_1$
angle V ; je décris ensuite une
cle du point b comme centre, avec le
je mène, par la trace horizontale a de la
, la tangente CD à cette circonférence.

La droite CD est la trace horizontale du plan cherché ; en joignant, par une droite, le point b' au point d'intersection des droites CD et LT, je construis la trace verticale C'D' de ce plan.

Scholie. — Ce problème a deux solutions lorsque l'angle $b'a_1b$ que la droite AB fait avec le plan horizontal est moindre que l'angle donné $b'e_1b$: car la droite ab est alors plus grande que le rayon be_1 du cercle, et le point a est extérieur à la circonférence.

Il n'y a qu'une solution si les angles $b'a_1b$, $b'e_1b$, sont égaux. Enfin, le problème est impossible lorsque l'angle $b'a_1b$ est plus grand que $b'e_1b$.

PROBLÈME VII.

Construire les traces du plan qui passe par un point donné A *et fait des angles donnés avec les plans de projection.*

1° Je suppose le point A (fig. 52) situé sur l'un des plans

de projection, par exemple sur le plan vertical. Soient BC, B'C', les traces du plan cherché, V l'angle que ce plan fait avec le plan horizontal, et V' celui qu'il fait avec le plan vertical. De la projection horizontale a du point A je mène la perpendiculaire ad' sur la droite B'C', et la perpendiculaire af sur la droite BC; la trace verticale B'C' est tangente au cercle décrit du point a comme centre avec le rayon ad', et passe par la projection verticale a' du point A; de même la trace horizontale BC est tangente au cercle décrit du point a comme centre avec le rayon af, et passe par le point de rencontre des droites B'C', LT. Donc la construction des traces BC, $B'C'_1$, du plan cherché, est ramenée à celle des rayons af, ad', des deux cercles.

Pour déterminer ces rayons, je rends le plan (BC, B'C') d'abord perpendiculaire au plan vertical de projection en le faisant tourner autour de l'axe vertical aa'. Alors, l'angle $a'f_1a$ que la trace verticale $f_1C'_1$ de ce plan fait avec la ligne de terre mesure l'angle dièdre V, et la distance af_1 du point a à la trace horizontale f_1C_1 est égale au rayon af : donc 1° si je trace par le point a', et jusqu'à la rencontre de la ligne de terre, une droite $a'f_1$ qui fasse avec $a'a$ un angle égal au complément de V, la droite af_1 sera le rayon du cercle tangent à la trace horizontale BC. Je rends ensuite vertical le plan cherché, en le faisant tourner autour de l'axe ae_2 perpendiculaire au plan vertical de projection, et je mène la perpendiculaire am_2 à la nouvelle trace horizontale d'_2C_2. Dans le triangle rectangle ad'_2m_2 l'hypoténuse ad'_2 est égale au rayon ad', l'angle ad'_2m_2 mesure l'angle dièdre V', et le côté am_2 est égal à la distance du point a au plan cherché, c'est à-

dire égal à la distance an'_1 du même point à la droite $a'f_1$. Donc 2° si je trace, par le point a et jusqu'à la rencontre de la droite $a'f_1$, une ligne droite ag' qui fasse avec an'_1 un angle égal au complément de V', la droite ag' sera le rayon du cercle tangent à la trace verticale B'C'.

2° Lorsque le point A ne sera pas donné sur l'un des plans de projection, je tracerai, par un point quelconque du plan vertical, un plan qui fasse les angles donnés avec les plans de projection, et je mènerai par le point A un plan parallèle au plan précédent.

Scholie. — La somme des angles donnés V et V', c'est-à-dire des angles af_1g', $ag'f_1$, peut être plus grande ou moindre qu'un angle droit, ou bien égale à un angle droit.

Si l'on a $V+V'>1$ dr., la ligne droite ag' est située dans l'angle n'_1aa', et le rayon ag' est moindre que aa'. Alors le problème a quatre solutions, car à chacune des deux tangentes au cercle ad' tracées par le point a' correspondent deux tangentes au cercle af. Lorsqu'un des angles V, V', est droit, ces quatre solutions se réduisent à deux, et même à une seule, si l'autre angle est aussi droit.

Quand la somme $V+V'$ est égale à un angle droit, la ligne droite ag' coïncide avec aa', et le problème n'a que deux solutions dans lesquelles les plans cherchés sont parallèles à la ligne de terre et symétriquement placés par rapport au plan vertical. Si l'un des angles V, V', est nul, et l'autre droit, les deux plans précédents coïncident et le problème n'a qu'une solution.

Enfin, lorsque la somme $V+V'$ est moindre qu'un angle droit, le point a' est intérieur au cercle ad', et le

problème est impossible. C'est la conséquence évidente du problème IV de ce chapitre.

PROBLÈME VIII.

Les trois faces d'un angle trièdre étant données, construire les projections de cet angle, c'est-à-dire les projections de ses arêtes.

Comme la position de l'angle trièdre par rapport aux plans de projection est abitraire, je trace (fig. 53) la droite $s'a'$ perpendiculaire à la ligne de terre ; je fais ensuite, sur le plan vertical, l'angle $a's'b'$ égal à l'une des trois faces données, et je considère les droites $s'a'$, $s'b'$, comme deux arêtes de l'angle trièdre cherché, ce qui réduit la question à la détermination des projections de la troisième arête.

Cela posé, je construis sur le plan vertical les angles $a's'c_1$, $b's'c_2$, respectivement égaux aux deux autres faces données, puis je fais tourner la droite $s'c_1$ autour de $s'a'$, et la droite $s'c_2$ autour de $s'b'$, jusqu'à ce qu'elles coïncident. Alors la position du point c_1 n'est autre que la trace horizontale de la troisième arête de l'angle trièdre. Pour la déterminer, je remarque 1° que le point c_1 décrit sur le plan horizontal une circonférence de cercle dont le centre est le point a'; 2° que le point de la droite $s'c_2$ qui coïncide avec c_1, lorsque les deux lignes $s'c_1$, $s'c_2$, se confondent, décrit autour de l'axe $s'b'$ une circonférence dont le plan est perpendiculaire à cet axe. Par conséquent, si je prends sur la droite $s'c_2$ la longueur $s'c_2$ égale à $s'c_1$, et que je mène, par le point c_2, le plan $c_2c'c$ perpendiculaire à la droite $s'b'$, la trace horizontale de la troisième arête sera l'intersection de la circonférence de cercle $a'c_1$, et de

la trace horizontale $c'c$ du plan $c_2c'c$. Or, d'après une propriété de l'angle trièdre, l'angle $b's'c_2$ est moindre que la somme $c_1s'b'$ des deux autres angles $c_1s'a'$, $a's'b'$, et plus grand que leur différence $d_1s'b'$: donc le point d'intersection c' de la ligne de terre et du plan $c_2c'c$ est toujours compris entre les extrémités du diamètre c_1d_1 du cercle $a'c_1$, et, par suite, la droite $c'c$ rencontre la circonférence de ce cercle en deux points c,γ, qui sont les traces horizontales des troisièmes arêtes de deux angles trièdres symétriques qu'on peut construire avec les données. Ces traces ont la même projection verticale c'.

Il résulte de là que la troisième arête de l'angle trièdre situé en avant du plan vertical a pour projections les droites sc, $s'c'$, et que celle de l'angle trièdre symétrique se projette suivant les droites $s\gamma$, $s'c'$.

Corollaire.—Il est facile de déduire des constructions précédentes la grandeur des angles dièdres de l'angle trièdre donné. En effet, 1° l'angle rectiligne $ca'c'$ sert de mesure à l'angle dièdre $ca's'c'$.

2° Soit h' le point de rencontre des droites $s'b'$ et $c'c_2$. Je mène, par le point c', la perpendiculaire $c'c_3$ à la droite $c'c_2$ jusqu'à la rencontre de l'arc de cercle c_2c_3, décrit du point h' comme centre avec le rayon $h'c_2$, et je trace la droite $h'c_3$. L'angle $c'h'c_3$ est évidemment l'angle rectiligne de l'angle dièdre dont l'arête est $s'b'$.

3° Je pourrais construire, par la méthode ordinaire, l'angle rectiligne du troisième angle dièdre, puisque les traces des plans $s'a'c$, $s'b'c$, qui forment cet angle dièdre, sont connues. Mais la construction suivante est plus simple : je trace, par le point c_1, la perpendiculaire c_1m' à la droite $s'c_1$, et par le point c_2 la perpendiculaire c_2n' à

la droite $s'c_2$. Soient m' le point de rencontre des droites c_1m', $s'a'$, et n' celui des droites c_2n', $s'b'$. Je construis la droite $m'n'$, et je ramène, comme précédemment, les deux lignes $s'c_1$, $s'c_2$, à coïncider. Alors les droites c_1m', $m'n'$, c_2n', forment un triangle dont le plan est perpendiculaire sur l'arête $s'c$, et l'angle opposé au côté $m'n'$ est le rectiligne de l'angle dièdre $s'c$. Par conséquent la question est réduite à construire sur le plan vertical un triangle $m'C'n'$ avec les trois droites c_1m', $m'n'$, c_2n', et l'angle C' sera l'angle cherché.

L'épure de ce problème donne lieu à trois vérifications: 1° les droites $c'c$, $c'c_3$, qui représentent toutes deux la distance de la trace horizontale de l'arête $s'c$ au plan vertical, sont égales; 2° le plan du triangle $m'C'n'$ étant perpendiculaire sur l'arête $(sc, s'c')$, la trace verticale $m'n'$ de ce plan est perpendiculaire sur la projection verticale $s'c'$ de cette droite; 3° le sommet C' du triangle $m'C'n'$, rabattu sur le plan vertical, se trouve évidemment sur la droite $s'c'$.

Scholie.—La construction du problème précédent sert aussi à *réduire à l'horizon l'angle des deux droites* $s'b'$, $s'c$, c'est-à-dire à déterminer la projection horizontale csc' de cet angle, l'inclinaison de chacun de ses côtés sur la verticale $s'a'$, qui passe par son sommet s', étant donnée.

PROBLÈME IX.

Les angles dièdres d'un angle trièdre étant donnés, construire les projections de cet angle trièdre.

Soient A, B et C, les trois angles dièdres donnés. Déterminez, par le problème précédent, les angles dièdres A', B', C', de l'angle trièdre qui a pour faces les angles

π—A, π—B, π—C. D'après une propriété connue des angles trièdres supplémentaires, les faces de l'angle trièdre proposé seront respectivement égales aux angles π—A′, π—B′, π—C′, et le problème sera ramené à construire les projections d'un angle trièdre dont les faces sont données.

PROBLÈME X.

Deux faces d'un angle trièdre et leur inclinaison étant données, construire les projections de cet angle trièdre.

Je trace (fig. 54) la droite $s'a'$ perpendiculaire à la ligne de terre, et je fais, sur le plan vertical, les angles $a's'b'$, $a's'c_1$, respectivement égaux aux deux faces données. En prenant les deux droites $s'a'$, $s'b'$, pour deux arêtes de l'angle trièdre cherché, je ramène la question à la détermination de la troisième arête.

Pour la construire, je fais tourner la droite $s'c_1$ autour de la verticale $s'a'$, d'un angle $c_1a'c$ égal à l'angle rectiligne de l'angle dièdre donné, et les nouvelles projections sc, $s'c'$, de la droite $s'c_1$, sont les projections de la troisième arête de l'angle trièdre. Car, 1° l'angle dièdre $ca's'b'$ est égal à l'angle dièdre donné; 2° la droite qui a pour projection les lignes sc, $s'c'$, fait avec $s'a'$ un angle égal à l'angle donné $a's'c_1$.

Scholie. — Les projections de l'angle trièdre étant construites, on peut facilement en déduire la grandeur de la troisième face et les deux autres angles dièdres, par une construction analogue à celle du problème VIII.

PROBLÈME XI.

Une face d'un angle trièdre et les deux angles dièdres adjacents à cette face étant donnés, construire les projections de cet angle trièdre.

Déterminez les deux faces inconnues de l'angle trièdre proposé et leur inclinaison, par la considération de l'angle trièdre supplémentaire, et le problème sera ramené au cas précédent.

Scholie.— Il existe une solution directe de ce problème; je l'indique comme exercice.

PROBLÈME XII.

Deux faces d'un angle trièdre et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles étant donnés, construire les projections de cet angle trièdre.

Je trace (fig. 55) la droite $s'a'$ perpendiculaire à la ligne de terre; je fais ensuite les angles $a's'b'$, $a's'c_1$, respectivement égaux aux deux faces données, et je prends les deux droites $s'a'$, $s'b'$, pour arêtes de l'angle trièdre cherché: alors la question est ramenée à la détermination de la troisième arête.

Pour la construire, je mène par la droite $s'b'$ un plan $s'b'e$ formant avec le plan vertical un angle égal à l'angle dièdre donné, et je fais tourner la droite $s'c_1$ autour de la verticale $s'a'$ jusqu'à ce qu'elle se trouve dans le plan $s'b'e$. Alors la position du point c_1 n'est autre que la trace horizontale de la troisième arête: par conséquent, cette trace est l'intersection de la circonférence de cercle décrite du point a' comme centre, avec le rayon $a'c_1$, et de la trace horizontale $b'e$ du plan $s'b'e$.

Lorsque la droite $b'e$ rencontre la circonférence $a'c_1$ en deux points c, γ, le problème a deux solutions, et la troisième arête se projette suivant les droites sc, $s'c'$, ou suivant les droites $s\gamma$, $s'\gamma'$. Si la droite $b'e$ est tangente à la circonférence $a'c_1$, le problème n'a qu'une solution. Enfin, il est impossible lorsque la droite $b'e$ et la circonférence $a'c_1$ n'ont aucun point commun.

PROBLÈME XIII.

Deux angles dièdres d'un angle trièdre et l'une des faces opposées à ces angles dièdres étant donnés, construire les projections de cet angle trièdre.

Déterminez les deux faces inconnues de l'angle trièdre proposé et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles, par la considération de l'angle trièdre supplémentaire. Alors le problème sera ramené au cas précédent.

PROBLÈME XIV.

Les trois faces d'un angle trièdre étant données, construire la projection et l'inclinaison de l'une des arêtes sur la face opposée.

Soient (fig. 56) BSC, BSa_1, CSa_2, trois angles égaux aux faces de l'angle trièdre proposé, et BSC celui sur lequel il faut projeter l'arête opposée, que j'appellerai SA. Je suppose que la droite Sa_1 tourne autour de SB et la droite Sa_2 autour de SC jusqu'à ce qu'elles coïncident avec l'arête SA. Dans ce double mouvement, deux points quelconques a_1, a_2, pris sur les droites Sa_1, Sa_2, à la même distance du sommet S, viennent se réunir en un point A de SA, en décrivant des circonférences dont les plans sont respective-

ment perpendiculaires aux axes de rotation SB et SC. Par conséquent, si je mène du point a_1 la droite a_1d, perpendiculaire à SB, et du point a_2 la droite a_2e, perpendiculaire à SC, ces lignes seront les traces des plans des circonférences sur le plan BSC, et leur intersection a sera la projection du point A sur le même plan. Donc la droite Sa est la projection de l'arête SA sur la face opposée BSC.

Pour déterminer l'inclinaison de la droite SA sur le plan BSC, c'est-à-dire l'angle que cette ligne fait avec sa projection Sa, il suffit de construire le triangle rectangle SAa, dans lequel l'hypoténuse SA et le côté Sa sont connus. Pour cela, je décris une circonférence de cercle, du point S comme centre, avec le rayon Sa_1, jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire aa_3 tracée par le point a sur la droite Sa; et la droite Sa_3, qui joint le point d'intersection a_3 de ces deux lignes au point S, fait avec Sa l'angle cherché.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

1. Tracer par le point d'intersection de deux droites données une ligne droite qui fasse avec ces lignes des angles donnés.

2. Tracer une droite qui rencontre deux droites données, et forme avec chacune d'elles un angle donné.

3. Tracer par un point une ligne droite qui fasse avec les plans de projection des angles donnés.

4. Les traces horizontales de deux plans qui se rencontrent et les angles que leur intersection fait avec les traces horizontales étant donnés, construire leurs traces verticales.

5. Les traces d'un plan et les projections d'un point de ce plan étant données, construire les projections d'une droite qui, tracée par le point dans le plan, fait avec la trace horizontale un angle donné.

6. Les traces d'un plan et les projections d'une ligne droite étant données, construire les traces d'un second plan qui passe par la droite et forme avec le plan donné un angle donné.

La droite donnée peut être dans le plan donné ou à l'extérieur.

Cas particulier dans lequel l'angle donné est droit.

7. Construire les projections d'une droite formant avec un plan donné un angle donné, et se projetant sur ce plan suivant une droite dont la projection horizontale est donnée.

CHAPITRE IV.

Projections d'un polyèdre. Développement de sa surface.

Si l'on conçoit des lignes droites menées par l'œil d'un observateur aux différents points d'un objet, jusqu'à la rencontre d'une surface plane servant de *tableau*, les points d'intersection de ces droites et de ce plan déterminent une figure qu'on appelle la *perspective* de l'objet, relativement à la position de l'observateur. Pour concevoir la forme d'un corps d'après ses projections sur deux plans rectangulaires, on considère chaque projection comme la perspective du corps, vu à une distance infinie du plan de projection correspondant, en se plaçant en avant du plan vertical ou au dessus du plan horizontal, selon que la projection que l'on regarde est verticale ou horizontale.

Cette convention étant admise, on trace en lignes pleines et continues les projections des arêtes du corps situées sur la partie antérieure de sa surface, et en points ronds les projections des arêtes qui se trouvent sur la partie postérieure de cette surface, parce que les premières sont visibles, et les secondes cachées par le corps lui-même.

La ligne de séparation des deux parties antérieure et postérieure de la surface d'un corps est appelée son *con-*

tour apparent. Ce contour apparent varie évidemment avec la position du plan sur lequel on projette le corps. Les projections des arêtes qui forment le contour apparent déterminent, sur chacun des plans de projection, un polygone fermé, convexe ou concave, à l'intérieur duquel sont projetées les autres arêtes du corps.

Pour construire les projections d'un polyèdre sur deux plans rectangulaires, on projette d'abord tous ses sommets; puis on trace les projections de ses arêtes, afin qu'il soit possible de distinguer, à la vue de l'épure, les arêtes des diagonales, et de reconnaître, par suite, les faces du polyèdre.

Dans les applications il faut étudier avec soin la forme particulière du corps proposé, pour simplifier les constructions par un choix convenable des plans de projection. C'est ainsi que, lorsque le corps a un plan de symétrie, il est avantageux de mener parallèlement à ce plan l'un des plans de projection, par exemple le plan vertical: car les deux parties dans lesquelles ce corps est divisé par le plan de symétrie auront la même projection verticale, et leurs projections horizontales seront symétriquement placées par rapport à la trace horizontale de ce plan.

Pareillement, si le corps a deux plans de symétrie rectangulaires, il faut prendre de préférence les deux plans de projection respectivement parallèles à ces plans de symétrie.

PROBLÈME I.

La base d'un prisme, la longueur de l'une des arêtes latérales et les angles que cette droite fait avec les côtés de la base qu'elle rencontre, étant donnés, construire les

projections de ce prisme et le développement de sa surface.

Soient (fig. 57) ABCDE la base inférieure du prisme proposé, et BAF, EAG, les angles que l'arête donnée AM fait avec les côtés AB, AE, de la base. Les faces BAF, BAE, EAG, de l'angle trièdre ABEM étant connues, je construis la projection A*h* et l'inclinaison *h*A*k* de l'arête AM sur la face opposée BAE, que je prends pour plan horizontal de projection, et je choisis le plan vertical parallèle à la droite AM, c'est-à-dire que je trace la ligne de terre LT parallèle à la projection horizontale *ah* de AM. Il résulte de là que les arêtes latérales du prisme se projetteront en vraie grandeur sur le plan vertical, ainsi que l'angle constant *h*A*k* qu'elles font avec le plan de la base ABCDE.

Cela posé, pour construire les projections d'une arête latérale quelconque BN, je projette le sommet B sur le plan vertical, puis je trace la droite $b'n'$ parallèle à la direction A*k* et égale à l'arête donnée AM. Cette droite $b'n'$ est la projection verticale de BN. Je détermine ensuite la projection horizontale, en menant la droite B*n*, parallèle à la ligne de terre, jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire tracée du point n' sur LT.

Cette construction, appliquée aux autres arêtes latérales du prisme, fait connaître aussi les projections des sommets de la base supérieure de ce polyèdre. Il faut remarquer que les projections verticales m', n', o', p', r', de ces points, se trouvent sur une même droite, parallèle à la ligne de terre, qui n'est autre que la trace verticale du plan de la base supérieure du prisme.

Je vais développer maintenant la surface du prisme sur

le plan vertical, c'est-à-dire construire sur ce plan les différentes faces de ce polyèdre, en les juxta-posant dans l'ordre de leur liaison. Pour cela, je prends un nouveau plan horizontal qui soit perpendiculaire aux arêtes latérales du prisme, et, par conséquent, je mène la nouvelle ligne de terre L_1T_1 perpendiculaire à $a'm'$. Soient a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, les nouvelles traces horizontales des arêtes latérales; ces points sont les sommets de la section droite faite dans ce polyèdre par le nouveau plan horizontal, de sorte que les côtés du polyèdre $a_1b_1c_1d_1e_1$ représentent les hauteurs respectives des parallélogrammes qui composent la surface latérale du prisme. Pour construire ces parallélogrammes sur le plan vertical, je porte tous les côtés de la section droite $a_1b_1c_1$ à la suite les uns des autres sur la ligne de terre L_1T_1, à partir d'un point quelconque α_1; je trace ensuite par chacun des points α_1, β_1, γ_1,... une perpendiculaire à la nouvelle ligne de terre, jusqu'à la rencontre des parallèles à L_1T_1 menées par les extrémités de la projection verticale de l'arête correspondant à ce point.

Cette construction donne le développement de la surface latérale du prisme, car le parallélogramme $\alpha\beta\nu\mu$ est évidemment égal à la face ABNM, etc. Les deux polygones $\alpha'\beta'\gamma\delta\varepsilon'$ et $\mu'\nu'o\pi\rho'$, qui sont égaux aux bases du prisme, complètent le développement de sa surface.

Scholie. — La ligne AB*nop*DE est la projection horizontale du contour apparent du prisme, et la ligne $a'c'o'm'$ en est la projection verticale.

PROBLÈME II.

La base d'une pyramide, la longueur de l'une des arêtes latérales et les angles que cette droite fait avec les côtés de la base qu'elle rencontre, étant donnés, construire les projections de cette pyramide et le développement de sa surface.

Soient (fig. 58) ABCDE la base de la pyramide, et BAF, EAG, les angles que l'arête donnée AS fait avec les côtés AB, AE, de la base. Je détermine, comme dans le problème précédent, la projection *ah* et l'inclinaison *h*A*k* de l'arête AS sur le plan BAE, que je prends pour plan horizontal, et je trace la ligne de terre parallèle à A*h*, de sorte que le plan vertical est parallèle à l'arête AS. Cela posé, je projette le sommet A sur le plan vertical, puis je mène par le point a' la droite $a's'$ parallèle à A*k* et égale à la longueur donnée de l'arête AS. Le sommet S de la pyramide a pour projection verticale le point s', et pour projection horizontale l'intersection de la perpendiculaire $s's$ et de la parallèle A*s* à la ligne de terre. En joignant le point *s* aux sommets de la base ABCDE et le point s' aux projections verticales de ces sommets, je détermine les projections horizontale et verticale de la pyramide.

Pour développer la surface de ce polyèdre sur le plan vertical, je détermine d'abord la longueur de chacune des arêtes latérales, en les ramenant à être parallèles au plan vertical, par une rotation effectuée autour de la verticale du sommet S, puis je construis les triangles $s'\alpha\beta$, $s'\beta\gamma$, et le polygone $\alpha'\delta'\gamma\delta\varepsilon'$, respectivement égaux aux faces latérales SAB, SBC, et à la base ABCDE de la pyramide, dont toutes les arêtes sont connues.

PROBLÈME III.

Les traces d'un plan étant données, construire les projections d'un polyèdre placé sur ce plan dans une position déterminée.

Changez de plans de projection et prenez le plan donné pour plan horizontal. Déterminez alors, comme dans les deux problèmes précédents, d'après les données géométriques de la question, les projections du polyèdre placé sur le nouveau plan horizontal, et construisez ensuite ses projections sur les plans de projection primitifs.

Scholie.— Cette méthode générale, qui est toujours applicable, pourra être abrégée et simplifiée dans chaque exemple particulier d'après la position du plan donné, et aussi d'après la forme et la position du polyèdre.

PROBLÈME IV.

Construire les projections du centre et la grandeur du rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre donné.

On démontre, en géométrie, que le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre SABC est le point d'intersection des plans conduits par les milieux des arêtes de ce polyèdre, perpendiculairement à ces droites.

Pour construire (fig. 59) les projections de ce point, je place la face ABC du tétraèdre sur le plan horizontal, de sorte que l'arête SA soit parallèle au plan vertical, et je détermine le centre (d, d') du cercle qui passe par les trois sommets A, B, C. Les plans perpendiculaires aux milieux des côtés AB, AC, BC, de la base du tétraèdre, se rencontrent suivant la verticale DO menée par le point D : donc le centre de la sphère se trouve sur cette droite.

Je trace ensuite un plan perpendiculaire au milieu de l'arête SA ; la trace verticale $m'o'$ de ce plan passe par le milieu m' de la droite $s'a'$ et lui est perpendiculaire, puisque l'arête SA est parallèle au plan vertical. Par conséquent l'intersection o' des droites $d'o'$, $m'o'$, est la projection verticale du centre de la sphère, qui se projette horizontalement au point o.

Cela posé, je construis la distance $o'a'_1$ du centre O au sommet A, c'est-à-dire le rayon de la sphère, en ramenant la droite (oA, $o'a'$) à être parallèle au plan vertical ; puis je trace, avec le rayon $o'a'_1$ et des points o, o', comme centres, deux cercles qui sont les projections des grands cercles de la sphère parallèles aux plans de projection. Les circonférences de ces cercles déterminent les portions des plans de projection sur lesquelles les points de la surface sphérique peuvent être projetés.

Scholie. — Si le tétraèdre avait une autre position par rapport aux plans de projection, je construirais, par les méthodes précédentes, les traces des plans perpendiculaires à ses arêtes et je déterminerais les projections de l'intersection de ces plans. — Je pourrais aussi ramener, par une transformation des projections, le tétraèdre à la position choisie dans l'épure ci-dessus.

PROBLÈME V.

Construire les projections du centre et la grandeur du rayon de la sphère inscrite dans un tétraèdre donné.

Je prends (fig. 60) pour plan horizontal de projection le plan de la base ABC du tétraèdre donné SABC. Soient s et s' les projections du sommet S.

Le centre de la sphère inscrite dans SABC est le point de rencontre des plans qui divisent en deux parties égales les angles dièdres de ce tétraèdre. Il s'agit donc de construire les projections des lignes d'intersection de ces plans bissecteurs considérés deux à deux, et d'en déduire les projections du point commun à ces droites. Je pourrais déterminer, par les méthodes précédentes, les traces des plans bissecteurs et les projections de leurs intersections, mais la construction suivante est plus simple.

Je coupe le tétraèdre par le plan horizontal M'N', et je vais construire les lignes suivant lesquelles il rencontre chacun des trois plans bissecteurs des angles dièdres qui ont pour arêtes les côtés AB, BC, CA, de la base. Je considère d'abord l'angle dièdre AB, et je le fais tourner autour de la verticale S*s* jusqu'à ce qu'il soit perpendiculaire au plan vertical, puis je divise cet angle, dans sa nouvelle position $s'd'_1d_1$T, en deux parties égales, par le plan $d_1d'_1e'_1$ qui rencontre le plan M'N' suivant une perpendiculaire au plan vertical, menée par le point e'_1 où se croisent leurs traces verticales.

Cela posé, je ramène l'angle trièdre $s'd'_1d_1$T dans sa position primitive : l'intersection du plan M'N' et du plan bissecteur $d_1d'_1e_1$ se projette alors verticalement sur M'N' et horizontalement sur la droite *fg*. Je construis pareillement les projections horizontales *fh*, *gh*, des droites suivant lesquelles le plan M'N' coupe les plans bissecteurs des angles dièdres BC, CA. Or, le point de rencontre *g* des droites *gf*, *gh*, est la projection horizontale d'un point commun aux deux plans bissecteurs AB, AC : donc l'intersection de ces plans a pour projection horizontale la droite A*g*. De même les droites B*f*, C*h*, sont les projec-

tions horizontales des lignes d'intersection du plan bissecteur BC par les deux autres AB , AC , et, par conséquent, le centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre se projette horizontalement au point de concours des trois droites A*f*, B*g* , C*h*.

Pour déterminer la projection verticale de ce point, je construis celle de la droite AG, en joignant le point a' au point g' qui se trouve sur la trace M'N' du plan auxiliaire; puis je mène du point *o* la perpendiculaire $o'r'$ sur la ligne de terre jusqu'à la rencontre de la droite $a'g'$. Cette construction fait connaître la projection verticale o' du centre et la grandeur $o'r$ du rayon de la sphère qui se projette suivant les deux grands cercles *o* et o'.

Scholie. — La construction des projections des points dans lesquels la sphère touche les faces du tétraèdre n'offre aucune difficulté, puisque ces points sont les pieds des perpendiculaires tracées du centre O sur les plans des faces. Je les déterminerais en ramenant chacune des faces à être perpendiculaire sur le plan vertical, par une rotation effectuée autour de la verticale qui passe par le centre O de la sphère.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

1. Construire les projections des cinq polyèdres réguliers et les développements de leurs surfaces, la longueur de leur arête étant donnée.

2. Construire les projections du centre et le rayon d'une sphère qui touche les plans des faces d'un tétraèdre indéfiniment prolongés. — Combien le problème a-t-il de solutions?

3. Les traces d'un plan étant données, construire les projections d'un cube, placé sur ce plan de telle sorte que la diagonale de sa base soit parallèle à la trace horizontale du plan et passe par un point donné.

4. Construire les projections d'un tétraèdre placé sur un plan parallèle à la ligne de terre, de telle sorte que l'un des côtés de sa base soit horizontal.

5. La trace horizontale d'un plan fait un angle de 45° avec la ligne de terre, et l'inclinaison de ce plan sur le plan horizontal est de 30° : placer sur ce plan un prisme dont la base est un pentagone régulier donné et dont les arêtes latérales sont parallèles à une droite donnée et d'une longueur aussi donnée.

6. Placer sur un plan donné par ses traces une pyramide hexagonale dont les projections horizontales des six sommets de la base sont données, ainsi que les deux projections du sommet.

On déterminera ensuite la vraie grandeur de la hauteur et de la base de cette pyramide.

CHAPITRE V.

Intersection de deux polyèdres.

PROBLÈME I.

Construire la section faite par un plan dans un polyèdre.

Ire *Solution.* — Je détermine d'abord les projections de la section faite dans le polyèdre par le plan donné, et je construis ensuite ce polygone, en le rabattant sur l'un des plans de projection.

La construction des projections de la section peut être faite de deux manières : 1° en cherchant les sommets de ce polygone, c'est-à-dire les points de rencontre des arêtes du polyèdre et du plan donné ; 2° en déterminant ses côtés, c'est-à-dire les lignes d'intersection du plan sécant et des faces du polyèdre.

Il faut employer le premier procédé lorsque le plan donné est perpendiculaire à l'un des plans de projection, par exemple au plan vertical, parce que les projections verticales des sommets de la section sont données immédiatement par les intersections de la trace verticale du plan sécant et les projections verticales des arêtes du polyèdre. Les projections horizontales de ces sommets sont alors déterminées; et pour en déduire les projections de la section, il suffit de joindre par des lignes droites les

projections des sommets qui, deux à deux, appartiennent à la même face du polyèdre.

Si le plan donné n'est pas perpendiculaire à l'un des plans de projection, on peut, par un changement de plan ou une rotation, ramener la question au cas précédent, ou bien déterminer directement les projections des côtés de la section. Ce second procédé étant d'une grande utilité dans la construction de l'intersection de deux polyèdres, je vais l'appliquer (fig. 61) à la détermination de la section de la pyramide SABCDE par le plan (FG, F′G′).

Je commence par chercher les projections de l'intersection de la face SAB et du plan donné. Leurs traces horizontales AB, FG, se rencontrent au point α; pour avoir un second point de l'intersection de ces plans, je les coupe par un plan horizontal X′Y′, qui rencontre la face SAB suivant la droite MI, et le plan (FG, F′G′) suivant la droite HK. Par conséquent le point N où ces deux droites se croisent est commun aux trois plans, et la droite αN est l'intersection de la face SAB et du plan proposé. Donc les portions op, $o'p'$, des projections de αN, comprises entre les projections horizontales et les projections verticales des arêtes SA, SB, de la face SAB, sont les projections du côté de la section situé sur cette face du polyèdre.

Pour construire les projections de l'intersection de la face suivante SBC et du plan sécant, je fais remarquer que le sommet P de la section est un point de cette droite, et par conséquent qu'il suffit de déterminer un autre point de cette ligne, par exemple le point de rencontre 6 des traces horizontales BC, FG, des plans considérés, puis de le

joindre au sommet P. Les portions pq, $p'q'$, de la droite 6P, comprises entre les projections horizontales et les projections verticales des arêtes SB, SC, de la face SBC, sont les projections du côté de la section situé sur cette face du polyèdre. En continuant ainsi, je construirai les projections des côtés suivants QR, RU, de la section, et le dernier côté sera immédiatement déterminé par la droite menée du sommet U au premier sommet O.

II[e] *Solution.* — Je prends pour nouveau plan horizontal le plan sécant, ou un plan qui lui soit parallèle, et je construis la nouvelle projection horizontale de la section, c'est-à-dire la section elle-même.

S'il s'agit, par exemple, de construire la section faite (fig. 62) dans le prisme pentagonal ABCDEF par le plan (MN, M'N'), je commence par changer de plan vertical, et je prends la ligne de terre L_1T_1 perpendiculaire à la droite MN, pour que le second plan vertical soit perpendiculaire au plan donné. Je détermine alors la nouvelle projection verticale $b'_1e'_1i'_1g'_1$ du prisme, ainsi que la projection horizontale $n'_1o'_1p'_1q'_1r'_1$ de la section faite dans le prisme par le plan (MN, $M'_1N'_1$). Je prends ensuite pour nouveau plan horizontal de projection un plan parallèle au plan sécant; la ligne de terre L_2T_2 est parallèle à la trace verticale $M'_1N'_1$ de ce plan, et la nouvelle projection horizontale $n'_2o'_2p'_2$ de la section est égale à la section elle-même, puisque leurs plans sont parallèles.

Scholie. — On pourrait prendre pour second plan horizontal le plan même de la section. Mais lorsque la détermination de ce polygone n'est qu'une partie accessoire de la question proposée sur le polyèdre donné, il convient mieux de prendre un plan parallèle au plan sécant, pour

transporter la section le plus loin possible du polyèdre, et par conséquent ne pas compliquer les constructions qu'exige la solution du problème.

PROBLÈME II.

Les projections d'un polyèdre et celles d'une ligne droite étant données, construire les projections de leurs points d'intersection.

Je commence par construire les projections de la section faite dans le polyèdre par l'un des plans projetants de la droite donnée, et je détermine ensuite les projections des points d'intersection du périmètre de cette section et de la droite.

Car ces points ne sont autres que ceux dans lesquels la droite donnée rencontre la surface du polyèdre.

Scholie. — Dans certains cas particuliers, cette solution peut être simplifiée, en choisissant convenablement le plan sécant, que l'on mène par la droite donnée.

Ainsi, lorsque le polyèdre donné est un prisme, il est avantageux de prendre le plan auxiliaire parallèle aux arêtes latérales du prisme, parce que la section qu'il détermine est alors un parallélogramme. — De même, si le polyèdre est une pyramide, il faut mener le plan auxiliaire par le sommet de la pyramide, car la section qu'il fait dans ce polyèdre est un triangle dont on construit facilement les projections au moyen de ses sommets.

PROBLÈME III.

Construire les projections de l'intersection de deux polyèdres P *et* P' *dont les projections sont données.*

Soient A et A' deux faces quelconques des polyèdres

P et P′; je commence par construire les projections de l'intersection des deux plans A et A′. Si cette droite n'a pas de point qui soit commun aux deux faces A et A′, ces faces ne se rencontrent pas; il faut alors chercher l'intersection de la face A du polyèdre P et d'une autre face B′ du polyèdre P′. Au contraire, si une portion quelconque *ab* de l'intersection des plans A et A′ est comprise à la fois dans les faces A et A′, celles-ci se coupent suivant ce segment de droite, qui est un côté de l'intersection des deux polyèdres.

Pour construire le côté suivant, qui part du sommet *b*, il faut remarquer que l'extrémité *b* de *ab* se trouve simultanément, par exemple, sur la face A et sur un côté $\alpha'\beta'$ de la face A′, de sorte que la droite cherchée est l'intersection de la face A du polyèdre P et de la face B′ du polyèdre P′, adjacente à A′, par l'arête $\alpha'\beta'$. Par conséquent, je tracerai les projections de cette droite, dont le point *b* est déjà connu, et je ne prendrai sur cette ligne que la partie commune aux deux faces A et B′, ce qui déterminera les projections d'un second côté *bc* de l'intersection des polyèdres.

En continuant ainsi, je construirai les projections du troisième côté *cd* et des côtés suivants, jusqu'à ce que je revienne au premier sommet *a;* car l'intersection de deux polyèdres qui ont des dimensions finies est une ligne polygonale fermée, ou bien elle est composée de deux lignes de ce genre, selon qu'il y a pénétration partielle ou totale de l'un des polyèdres dans l'autre.

Scholie I. — Si l'on excepte le premier côté de l'intersection, dont la construction exige deux points, chacun des autres côtés est déterminé par un seul point, parce

qu'il a une extrémité commune avec le côté précédent, qui est déjà construit. En appliquant cette méthode à la détermination du dernier côté, on est conduit à une vérification, car ce côté doit aboutir au premier sommet *a*.

Scholie II. — En développant sur un plan les surfaces des deux polyèdres et traçant sur chacun des développements les côtés de leur intersection, on forme deux lignes polygonales qu'on appelle les *transformées* de la ligne d'intersection. Si l'on détache de chaque surface les parties circonscrites par ces transformées, les parties restantes composent la surface totale du corps formé par le système des deux polyèdres qui se coupent, de sorte qu'en les ajustant entre elles, comme l'épure l'indique, on reproduirait la surface de ce corps.

Je terminerai ce chapitre par le problème suivant, qui offre un exemple de pénétration totale.

PROBLÈME IV.

1° *Construire les projections de l'intersection de deux prismes triangulaires dont l'un est droit et l'autre oblique ;*

2° *Tracer les transformées de la ligne d'intersection sur les développements des surfaces de ces prismes.*

Je suppose (fig. 63), pour simplifier l'épure, les bases ABC, GHI, des prismes placées sur le plan horizontal de projection, et les arêtes latérales du prisme oblique GHIM parallèles au plan vertical.

Cela posé, je construis les projections de l'intersection de la face ABDE du prisme droit et de la face GHMN du prisme oblique ; les points de rencontre *p* et *q* de la droite

AB avec les droites G*m*, H*n*, déterminent les projections horizontales, et, par suite, les projections verticales p', q', de deux points de l'intersection cherchée : donc la droite PQ, dont les extrémités sont à la fois sur la face ABDE du prisme droit et sur les arêtes GM, HN, qui terminent la face GHMN du prisme oblique, est un côté de l'intersection de ces polyèdres. Le côté suivant, qui part du sommet Q, se trouve à la fois sur la face ABDE du prisme droit et sur la face HNOI de l'autre prisme ; or l'arête OI de cette dernière face rencontre le plan ABD au point (r, r') : donc la droite QR est le second côté cherché, et, par conséquent, la troisième face latérale GIMO du prisme oblique traverse la face ABDE du prisme droit suivant la droite RP, qui est le troisième côté de leur intersection.

Il résulte de la construction précédente que le prisme oblique pénètre dans le prisme droit par l'ouverture triangulaire PQR qu'il pratique dans la face ABDE ; il le traverse ensuite, et en sort, par une autre ouverture STUVX, qu'il détermine dans les faces ACFD, BCFE. Dans cet exemple de pénétration totale, la ligne PQR est dite *ligne d'entrée*, et la ligne STU... *ligne de sortie*. Pour construire les projections de la ligne de sortie, je remarque d'abord que, les arêtes GM, HN, du prisme oblique, rencontrant le plan de la face ACFD du prisme droit aux points (s, s') et (α, α'), les deux plans ACF, GHM, se coupent suivant la droite $(s\alpha, s'\alpha')$, et que la partie ST de cette droite commune aux faces ACFD, GHMN, est un côté de la ligne de sortie. Comme le point T se trouve sur la face GHMN et sur l'arête CF du prisme droit, je cherche, en second lieu, l'intersection des faces GHMN et

BCFD ; or, l'arête HN rencontre le plan BCF au point (u, u') : donc la droite TU est le second côté de la ligne de sortie. En continuant ainsi, je trouverai successivement les autres côtés UV, VX, XS, de cette ligne.

Les projections de l'intersection des deux prismes étant construites, je fais, par la méthode précédemment exposée, le développement de la surface de chacun des prismes, et je trace d'abord les transformées de la ligne d'intersection de ces polyèdres sur le développement ADEBCFDA de la surface du prisme droit. Pour cela, je marque, sur le périmètre rectifié ABCA de la base ABC, la projection horizontale de chaque sommet de l'intersection des prismes ; je mène, par cette projection, une perpendiculaire à la droite ABC, et je la prends égale à la distance de la projection verticale du même sommet à la ligne de terre. Il est évident que l'extrémité de chaque perpendiculaire ainsi déterminée est un sommet de la transformée. C'est ainsi que j'ai construit les lignes PQR et STUVX sur le développement du prisme droit.

Pour développer plus facilement la surface du prisme oblique, j'ai pris un nouveau plan horizontal, perpendiculaire aux arêtes latérales du prisme ; et, par conséquent, j'ai déterminé chaque sommet de la transformée correspondant à ce développement, en traçant par la projection verticale de ce point une parallèle à la ligne de terre L_1T_1 jusqu'à la rencontre de l'arête sur laquelle le sommet doit se trouver. Cette construction donne les deux lignes $r'_1q'_1p'_1r'_1$ et $v'_1u'_1t'_1s'_1x'_1v'_1$ pour les transformées des lignes d'entrée et de sortie.

Scholie. — Si l'on voulait construire l'enveloppe du corps formé par les deux prismes, il faudrait découper,

dans les développements précédents, les figures PQR, STU..., $r'_1v'_1s'_1v'_1r'_1$, puis ajuster la partie inférieure r'_1I du prisme oblique à l'ouverture PQR faite dans le prisme droit, et la partie supérieure Ov'_1 du prisme oblique à l'autre ouverture STU.... du prisme droit.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

1. Déterminer la section faite dans un dodécaèdre régulier par un plan donné.

2. Couper une pyramide quadrangulaire quelconque par un plan tel que la section soit un parallélogramme.

3. Construire les projections des points de rencontre d'une ligne droite et de la surface d'un octaèdre régulier.

4. Construire les projections de l'intersection d'une pyramide quadrangulaire et d'un prisme triangulaire dont les bases sont sur le même plan.

Tracer les transformées de la ligne d'intersection sur les développements de chacune des surfaces de ces polyèdres.

5. Construire les projections de l'intersection de deux pyramides ayant leurs bases sur le même plan.



LIVRE III.

PLANS TANGENTS AUX SURFACES COURBES

CHAPITRE I.

Propriétés générales des surfaces courbes.

On peut concevoir toute surface courbe comme engendrée par le mouvement d'une ligne de forme et de grandeur constantes, ou variables d'après une loi déterminée, cette ligne étant assujettie à rencontrer une ou plusieurs lignes fixes, qu'on appelle les *directrices* de la surface.

De là résultent deux classifications différentes des surfaces courbes. Dans la première, les surfaces sont groupées d'après la nature de leur *génératrice*, et se subdivisent en deux genres : l'un comprend les surfaces *réglées*, c'est-à-dire celles qui peuvent être engendrées par le mouvement d'une ligne droite, et l'autre se compose des surfaces qui n'ont pas de génératrice rectiligne, et qu'on désigne sous le nom de *surfaces courbes* proprement dites. Dans la seconde classification, les surfaces sont rangées d'après la loi du mouvement de leur génératrice, et se partagent aussi en deux groupes : l'un comprend les *surfaces de révolution*, c'est-à-dire celles qui sont engendrées par une ligne quelconque tournant autour d'un axe rectiligne auquel cette ligne est liée d'une

manière invariable; l'autre groupe se compose des surfaces qui ne sont pas de révolution.

La géométrie élémentaire offre des exemples de ces différents genres de surface : les surfaces cylindriques et coniques sont réglées, tandis que la surface sphérique est une surface courbe proprement dite. A un autre point de vue, la surface sphérique est de révolution, tandis que les surfaces cylindriques et coniques ne sont pas toutes de révolution.

On démontre (1) en géométrie que le lieu des tangentes menées par un point d'une surface aux différentes courbes tracées par ce point sur cette surface est un plan *tangent* à la surface.

La droite menée par le *point de contact* perpendiculairement au plan tangent est *normale* à la surface courbe proposée.

On dit que deux surfaces *se raccordent* suivant une ligne qui leur est commune lorsqu'en tout point de cette ligne elles ont le même plan tangent.

THÉORÈME I.

Toute surface réglée est développable, c'est-à-dire qu'*elle peut être étendue sur un plan sans déchirure ni duplicature, lorsque deux positions successives quelconques de sa génératrice rectiligne sont dans le même plan.*

Soient (fig. 64) aa', bb', cc', dd',.... les positions successives de la génératrice : les droites consécutives aa', bb', situées par hypothèse dans le même plan, se ren-

(1) Voir le livre VII de ma Géométrie.

contrent ou sont parallèles ; il en est de même des droites *bb'* et *cc'*, des droites *cc'* et *dd'*, etc.... Par conséquent la surface réglée peut être considérée comme une surface polyédrale, ayant pour faces les portions, infiniment petites, de plans *aa'b'*, *bb'c'*, *cc'd'*,.... comprises entre les positions successives de la génératrice ; et cette surface est développable : car, si l'on conçoit que la première face *aa'b'* tourne autour de la droite *bb'* jusqu'à ce que son plan coïncide avec celui de la seconde face *bb'c'*, lorsque ces deux faces seront sur le même plan, on pourra faire tourner ce plan autour de *cc'* jusqu'à ce qu'il coïncide avec celui de la troisième face *cc'd'*. Alors les trois faces *aa'b'*, *bb'c'*, *cc'd'*, étant situées sur le même plan, on fera tourner ce plan autour de *dd'* pour l'amener à coïncider avec celui de la quatrième face, et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les faces soient appliquées sur un même plan.

Scholie I.—Si la génératrice reste parallèle à elle-même dans son mouvement, la surface réglée est cylindrique, et les éléments plans qui la composent ont la forme parallélogrammique.

Au contraire, la surface est formée d'éléments triangulaires lorsque les positions successives de la génératrice se rencontrent. Ces droites déterminent alors, par leurs intersections, une ligne à double courbure, *abcde*, qu'on appelle l'*arête de rebroussement* de la surface réglée, et à laquelle la génératrice est constamment tangente. L'arête de rebroussement divise la surface réglée en deux parties, qui sont les *nappes* de cette surface.

Lorsque la génératrice passe par un point fixe, la surface réglée est un cône, et l'arête de rebroussement se réduit à un point.

Scholie II. — Si deux positions successives quelconques de la génératrice d'une surface réglée ne sont pas dans le même plan, cette surface n'est pas développable, car il est impossible d'étendre sur un plan la portion infiniment petite de surface comprise entre deux positions consécutives de la génératrice. On dit alors que la surface réglée est *gauche*.

On distingue deux genres de surfaces gauches : l'un comprend les surfaces dont la génératrice est constamment parallèle à un plan fixe, qu'on nomme le plan *directeur* de la surface; dans l'autre sont rangées les surfaces qui n'ont pas de plan directeur, c'est-à-dire dont la génératrice n'est pas parallèle à un plan fixe.

THÉORÈME II.

Toute surface gauche peut être engendrée par le mouvement d'une ligne droite assujettie à rencontrer trois lignes fixes.

Soient (fig. 65) AB, A'B', A''B'', trois lignes quelconques tracées sur la surface gauche donnée : si l'on conçoit deux cônes qui aient le même sommet M, situé sur la courbe AB, et dont les deux autres courbes A'B', A''B'', soient les directrices, les surfaces de ces cônes se couperont généralement suivant une ou plusieurs génératrices. Soit MMM'' l'une des génératrices communes à ces deux cônes : cette droite passe par le point M de la ligne AB, et rencontre les deux autres lignes A'B', A''B''. Donc, si le point M décrit la ligne AB, la droite MM'M'' engendrera la surface gauche proposée, en glissant sur les trois lignes données.

Scholie. — Lorsque les trois lignes AB, A'B', A''B'', sont trois droites, deux à deux non situées dans le même plan, on démontre (1) 1° que la surface gauche correspondante n'est autre que l'*hyperboloïde à une nappe*, si les trois droites AB, A'B', A''B'', ne sont pas parallèles à un même plan ; 2° que, dans le cas contraire, cette surface gauche est un *paraboloïde hyperbolique*.

Deux positions quelconques de la génératrice rectiligne de ces surfaces ne peuvent être dans un même plan, sinon les trois directrices seraient aussi dans ce plan, ce qui est impossible.

THÉORÈME III.

Toute surface gauche qui a un plan directeur peut être engendrée par une ligne droite assujettie à rencontrer deux lignes fixes.

Soient (fig. 66) AB, A'B', deux lignes tracées sur une surface gauche qui a pour plan directeur le plan PQ. Si, par un point M de la ligne AB, on conduit un plan parallèle à PQ, ce plan rencontre en général la ligne A'B' en un ou plusieurs points. Soit M' l'un de ces points d'intersection : la droite MM', parallèle au plan PQ et rencontrant les deux lignes AB, A'B', est une génératrice de la surface gauche; donc, si le point M décrit la ligne AB, la droite MM' engendrera la surface gauche en glissant sur les deux lignes AB, A'B'.

Scholie. — On démontre (2) que la surface gauche

(1-2) Voir, pour les démonstrations de ce genre, le savant traité de Géométrie analytique de MM. Briot et Bouquet.

est un *paraboloïde hyperbolique* lorsque les deux lignes AB, A'B', sont deux droites non situées dans le même plan. Cette surface est aussi connue sous le nom de *plan gauche.*

Deux positions quelconques de la génératrice rectiligne de cette surface ne peuvent être dans un même plan, sinon les deux directrices seraient aussi dans ce plan, ce qui est impossible.

Parmi les surfaces gauches qui ont un plan directeur, on distingue celles dont une seule des directrices AB, A'B', est droite ; ces surfaces sont des *conoïdes.*

THÉORÈME IV.

L'hyperboloïde à une nappe peut être engendré de deux manières différentes par le mouvement d'une droite, assujettie à rencontrer trois droites fixes.

Soient (fig. 67) AB, CD, EF, les trois directrices rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe : je trace les droites BC, DE, FA, de telle sorte que chacune soit parallèle à l'une des lignes AB, CD, EF, et rencontre les deux autres; et je dis que l'hyperboloïde à une nappe dont les droites BC, DE, FA, sont les directrices, coïncide avec l'hyperboloïde donné.

En effet, soit GHK une position de la génératrice du premier hyperboloïde dans laquelle cette droite rencontre les directrices de cette surface aux points G, H et K : je mène par GH un plan quelconque qui coupe les directrices du second hyperboloïde aux points L, M, N, et je vais démontrer que ces points sont en ligne droite. Je remarque d'abord que les angles opposés de l'hexagone

gauche ABCDEF ont leurs côtés parallèles, et que, par conséquent, les plans de ces angles sont parallèles, ainsi que leurs intersections par le plan conduit suivant la droite GH : donc les côtés opposés de l'hexagone plan GNHMKL, déterminés par ces intersections, sont parallèles. Je remarque, en second lieu, que les points L, M, N, sont situés sur les côtés du triangle OPR, formé par les côtés non consécutifs GL, MK, NH, de l'hexagone GNHMKL.

Cela posé, je déduis du parallélisme des droites KL, NP, la proportion

$$\frac{RL}{PL}=\frac{RK}{OK}.$$

Les droites MH, GL, étant aussi parallèles, j'ai pareillement :

$$\frac{OM}{RM}=\frac{OH}{PH}.$$

Enfin le parallélisme des droites KR, GN, donne aussi :

$$\frac{PN}{ON}=\frac{PG}{RG}$$

Multipliant ces proportions terme à terme, j'obtiens cette nouvelle proportion

$$\frac{RL\times OM\times PN}{PL\times RM\times ON}=\frac{RK\times OH\times PG}{OK\times PH\times RG},$$

dont le second rapport est égal à l'unité, parce que les trois points K, H, G, sont déterminés par la droite GH sur les côtés du triangle OPR. Donc j'ai l'égalité

$$RL\times OM\times PN=PL\times RM\times ON,$$

et les points L, M, N, sont en ligne droite.

Il résulte de cette démonstration 1° que la droite LN est une génératrice du second hyperboloïde; 2° que la

génératrice de cette surface rencontre la génératrice du premier hyperboloïde dans toutes ses positions, puisqu'elles sont constamment dans un même plan. Donc les deux hyperboloïdes coïncident, ou, en d'autres termes, l'hyperboloïde à une nappe peut être engendré de deux manières différentes par une droite glissant sur trois droites fixes.

COROLLAIRE I. — Par un point quelconque de l'hyperboloïde à une nappe on peut tracer deux génératrices rectilignes appartenant à chacun des deux systèmes de génération de cette surface.

COROLLAIRE II. — *Les trois diagonales qui joignent les sommets opposés de l'hexagone gauche* ABCDEF *concourent au centre de l'hyperboloïde à une nappe.*

Car le plan de deux côtés opposés quelconques de cet hexagone, tels que BC et EF, rencontrant les plans parallèles BAF, CDE, en deux droites parallèles BF, CE, le quadrilatère BCEF est un parallélogramme, et les diagonales BE, CF, se divisent mutuellement en deux parties égales, au point S. Donc ce point, milieu des cordes AD, BE, CF, de l'hyperboloïde, non situées dans le même plan, est le centre de cette surface.

De là résulte le procédé suivant pour reconnaître si un hyperboloïde à une nappe déterminé par trois directrices rectilignes AB, CD, EF, est ou n'est pas un hyperboloïde de révolution. Tracez les droites BC, DE, FA, de manière à ce que chacune d'elles soit parallèle à l'une des lignes AB, CD, EF, et rencontre les deux autres; déterminez ensuite le point d'intersection S des diagonales qui joignent les sommets opposés de l'hexagone gauche ABCDEF. Si les perpendiculaires menées aux trois directrices rectili-

gnes AB, CD, EF, par le centre S, sont égales et situées dans le même plan, et que les trois directrices soient inclinées également et dans le même sens sur ce plan, l'hyperboloïde est de révolution; dans l'hypothèse contraire, l'hyperboloïde n'est pas de révolution.

THÉORÈME V.

Le paraboloïde hyperbolique peut être engendré de deux manières différentes par le mouvement d'une droite qui rencontre deux droites fixes et soit constamment parallèle à un plan fixe.

Soient (fig. 68) AB, CD, les deux directrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique, LMT son plan directeur, et EF, GH, KP, trois positions quelconques de sa génératrice. Je dis que ce paraboloïde coïncide avec celui qui a pour plan directeur un plan parallèle aux droites AB, CD, et pour directrices les droites EF, KP. Pour le démontrer, je mène par un point quelconque R de la droite EF un plan parallèle aux deux droites AB, CD. Ce plan rencontre les droites GH, KP, aux points S et X, qui sont en ligne droite avec le point R : car, si je projette le quadrilatère gauche EFPK sur un plan LNT perpendiculaire à la droite GH, et, par suite, au plan directeur LMT qui est parallèle à GH, comme les côtés opposés EF, KP, de ce quadrilatère sont, par hypothèse, parallèles au plan LMT, leurs projections *ef*, *kp*, seront parallèles à l'intersection LT des deux plans LMT, LNT, et celles des deux autres côtés EK, FP, passeront par la projection *h* de la droite GH.

Si je conçois maintenant trois plans conduits par les

droites AB, RX, CD, parallèlement aux deux directrices AB, CD, ces plans divisent les droites EF, KP, en segments proportionnels, et, par conséquent, les projections r, x, des points R, X, divisent aussi les projections ef, kp, de telle sorte que l'on a

$$re : rf :: xk : xp.$$

Donc la projection rx de la droite RX passe par le point h, et les deux droites GH, RX, sont dans le même plan, ou, en d'autres termes, les trois points R, S, X, sont en ligne droite.

Je conclus de cette démonstration que la droite RX, qui est une génératrice du second paraboloïde, rencontre une génératrice quelconque GH du premier paraboloïde, et, par conséquent, que ces deux surfaces gauches coïncident. Donc le paraboloïde hyperbolique peut être engendré de deux manières différentes par une droite glissant, parallèlement à un plan fixe, sur deux droites non situées dans le même plan.

Corollaire. — Par un point quelconque d'un paraboloïde hyperbolique on peut tracer deux génératrices rectilignes, appartenant aux deux modes de génération de cette surface.

THÉORÈME VI.

Le plan tangent à une surface réglée contient la génératrice qui passe par le point de contact.

(Pour la démonstration, voir le théorème I du livre VII de ma Géométrie.)

Corollaire. — *Le plan tangent en un point de la géné-*

ratrice rectiligne d'une surface développable est tangent en tout autre point de cette droite.

Ce théorème est déjà démontré dans la géométrie élémentaire pour les surfaces cylindriques et coniques.

Soient (fig. 69) ABCD.... l'arête de rebroussement d'une surface développable, et AM, AN, deux positions successives de sa génératrice rectiligne. Je coupe cette surface par un plan qui détermine la section MNOP, et je décris du point A, comme centre, une surface conique ayant pour directrice la courbe MNOP. Il est évident que les deux surfaces se raccordent dans l'étendue infiniment petite de l'arc MN, puisque les deux droites AM, AN, sont deux positions successives de leurs génératrices. Donc tout plan tangent à la surface conique en un point de l'arête AM est aussi tangent à la surface développable, et, par conséquent, ce plan touche cette surface en tout point de la génératrice AM.

THÉORÈME VII.

Tout plan conduit par la génératrice rectiligne d'une surface gauche est tangent à cette surface en un point de cette droite.

Soient (fig. 70), en effet, AB, CD, EF, trois positions consécutives de la génératrice rectiligne d'une surface gauche. Je mène un plan quelconque par la droite CD. Ce plan rencontre la génératrice dans toutes ses positions, puisque deux d'entre elles ne sont pas parallèles : donc il coupe la surface gauche suivant une ligne MN, autre que la droite AB. Si je considère les deux points G et K de cette ligne, situés sur les droites AB, EF, et

des deux côtés de CD, la droite GK rencontre la génératrice CD en un point H, appartenant aussi à la courbe MN : par conséquent, cette courbe, dont trois points G, H, K, sont en ligne droite, a une inflexion au point H. Or le plan CDM qui détermine, dans la surface gauche, la section MHN, contient la tangente LT au point d'inflexion H de cette ligne courbe, et la génératrice rectiligne CD : donc il est tangent à la surface gauche.

Scholie I. — Lorsque la surface gauche donnée est *doublement réglée*, c'est-à-dire lorsqu'elle peut être engendrée de deux manières différentes par le mouvement d'une ligne droite, la ligne MN est une droite qui appartient au mode de génération différent de celui dont les droites AB, CD, EF, font partie.

Scholie II. — La démonstration de ce théorème donne le moyen de déterminer le point H dans lequel un plan conduit par une génératrice CD de la surface gauche touche cette surface.

CHAPITRE II.

Plans tangents aux cylindres.

1. On appelle *surface cylindrique* toute surface engendrée par le mouvement d'une ligne droite assujettie à rencontrer une ligne courbe donnée, en restant parallèle à une ligne droite aussi donnée.

2. Si l'on mène par les différents points d'une ligne courbe quelconque des perpendiculaires à l'un des plans de projection, ces droites forment une surface cylindrique dont la trace sur ce plan est la projection de la courbe donnée. Ce cylindre projette horizontalement ou verticalement la courbe, selon que le plan de projection que l'on considère est horizontal ou vertical.

3. Une surface cylindrique est déterminée lorsqu'on connaît les projections de ses deux directrices. Car, si l'on trace par les différents points de la directrice courbe des parallèles à la directrice droite, ces lignes seront les différentes positions de la génératrice de la surface. En construisant les points d'intersection de ces droites et du plan horizontal, on déterminera la trace horizontale du cylindre. On obtiendra sa trace verticale par une construction semblable.

Pour plus de simplicité, je supposerai désormais toute surface cylindrique donnée par sa directrice droite et sa trace sur l'un des plans de projection, puisqu'il est tou-

jours possible de construire cette trace lorsqu'elle n'est pas l'une des données de la question.

PROBLÈME I.

Construire un plan tangent à un cylindre et parallèle à une ligne droite donnée.

Soient (fig. 71) ABC la trace horizontale d'un cylindre; *de*, *d'e'*, les projections de sa directrice droite, et *gf*, *g'f'*, celles de la droite à laquelle le plan tangent doit être parallèle.

Par un point quelconque F de la droite GF je mène la droite (*fh*, *f'h'*) parallèle à la directrice (*de*, *d'e'*), et je construis les traces du plan des deux droites FG, FH. Ce plan est parallèle au plan tangent, puisqu'il contient deux droites qui lui sont parallèles; par conséquent, le problème est ramené à construire un plan parallèle au plan (FG, FH), et tel que sa trace horizontale soit tangente à la base du cylindre. Pour cela, je tire la droite KM parallèle à *gh* et tangente à la courbe ABC; puis je mène par le point d'intersection des lignes KM, LT, la droite K'M', parallèle à la trace verticale du plan (FG, FH), et les droites KM, K'M', sont les traces du plan tangent cherché.

Ce problème a autant de solutions qu'on peut mener de droites tangentes à la courbe ABC et parallèles à la direction *gh*.

Scholie. — Si la droite GF est verticale, le plan tangent l'est aussi, et il a pour trace horizontale une parallèle à la projection horizontale de la directrice DE. La génératrice par laquelle ce plan touche alors le cylindre fait partie du contour apparent de ce corps par rapport au plan

horizontal : car, le cylindre étant tout entier d'un côté du plan tangent, sa projection horizontale se trouve aussi tout entière du même côté de la trace horizontale de ce plan, qui projette horizontalement la génératrice de contact.

De là résulte ce théorème : Le contour apparent d'un cylindre ABM (fig. 72) sur le plan horizontal est le système des deux droites AF, BG, tangentes à la base ABM, et parallèles à la projection horizontale de la directrice droite DE.

Je prouverais pareillement que le contour apparent de ce cylindre sur le plan vertical se compose des traces verticales C'H', K'M', de deux plans tangents au cylindre et perpendiculaires au plan vertical; de sorte que pour construire ces droites il faut mener à la courbe ABC les tangentes CH, KM, perpendiculaires à la ligne de terre, et tracer ensuite, par les points où ces droites rencontrent la ligne LT, les parallèles C'H', K'M', à la projection verticale de DE.

PROBLÈME II.

Mener un plan tangent à un cylindre par un point de sa surface.

Soient ABC (fig. 73) la trace horizontale du cylindre, *pr*, *p'r'*, les projections de sa directrice rectiligne, et *m* la projection horizontale d'un point de sa surface.

Je mène par le point *m* la droite *m*A parallèle à *pr*; le plan vertical conduit par *m*A rencontre la surface cylindrique suivant deux génératrices dont les traces horizontales sont les points d'intersection A et B de la courbe ABC et

de la droite *m*A. Pour construire les projections verticales de ces génératrices, je projette les points A, B, sur le plan vertical, et je trace par les points *a'*, *b'*, les droites *a'd'*, *b'e'*, parallèles à *p'r'*. En menant par le point *m* une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre des lignes *a'd'*, *b'e'*, je détermine ensuite les projections verticales *m'* et *n'* des points de la surface cylindrique qui se projettent horizontalement au point *m* et sont situés sur les génératrices AD, BE.

Le plan tangent au point (*m*, *m'*) contient la génératrice MB et la tangente menée par le point B à la trace horizontale du cylindre : par conséquent, la trace horizontale de ce plan n'est autre que la tangente BF à la courbe ABC menée par le point B. En joignant le point d'intersection de cette droite et de la ligne de terre à la trace verticale *e'* de la génératrice MB, j'ai la trace verticale du plan tangent.

Je construirai de même le plan tangent au point N. Ce plan doit rencontrer le précédent suivant une droite parallèle aux génératrices du cylindre.

Scholie. — Lorsque la trace verticale *e'* de la génératrice BM se trouve hors des limites de l'épure, il faut déterminer un autre point de la trace verticale du plan tangent en construisant les projections d'une horizontale quelconque de ce plan. Ainsi, dans l'épure ci-jointe, j'ai mené par le point M l'horizontale (*mg*, *m'g'*) du plan tangent (BF, M), et construit la trace verticale de ce plan en joignant par une droite la trace verticale *g'* de l'horizontale MG au point de rencontre des droites BF et LT.

PROBLÈME III.

Mener un plan tangent à un cylindre par un point extérieur à sa surface.

Soient (fig. 74) ABC la trace horizontale du cylindre, *de*, *d'e'*, les projections de sa directrice droite, et *m*, *m'*, les projections du point donné à l'extérieur de sa surface.

Le plan tangent cherché devant contenir une génératrice du cylindre, la parallèle à la directrice DE, menée par le point M, est tout entière dans ce plan ; et, par suite, la trace horizontale de cette droite est un point de la trace horizontale du plan tangent. De là résulte cette construction : je mène, par le point M, la droite (*mf*, *m'f'*) parallèle à la directrice (*de*, *d'e'*), et, par la trace horizontale *f* de cette ligne, la droite *f*A tangente à la courbe ABC.

Cette droite *f*A est la trace horizontale du plan tangent. Je détermine la trace verticale de ce plan, en joignant la trace verticale *g'* de la droite MF au point de rencontre des lignes *f*A et LT.

Ce problème a autant de solutions qu'on peut mener de tangentes à la courbe ABC par le point *f*. Dans l'épure ci-jointe il y a deux tangentes *f*A, *f*B, et par conséquent deux plans tangents, qui passent par le point donné. Ces plans ont pour intersection la droite MF.

PROBLÈME IV.

Construire un plan tangent à deux cylindres dont les génératrices sont parallèles.

Menez une tangente commune aux deux bases horizon-

tales des cylindres : cette droite sera la trace horizontale du plan tangent ; vous déterminerez ensuite sa trace verticale au moyen de l'une des traces verticales des génératrices par lesquelles le plan touche chacun des cylindres.

Ce problème a autant de solutions qu'on peut mener de tangentes communes aux deux bases des cylindres.

PROBLÈME V.

Construire un plan tangent à deux cylindres qui ont la même trace horizontale.

Tracez, par un point quelconque de l'espace, des parallèles aux deux directrices droites des cylindres. Le plan de ces deux lignes est parallèle au plan tangent cherché : par conséquent, la question est ramenée à construire un plan parallèle au précédent, et tel que sa trace horizontale soit tangente à la base des cylindres.

Ce problème a autant de solutions qu'on peut mener de droites tangentes à la base des cylindres et parallèles à une droite donnée.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

1. Les traces de deux plans étant données, construire les projections d'un cylindre tangent à ces deux plans, et tel que sa trace horizontale soit une circonférence de cercle passant par un point, donné sur le plan horizontal de projection.

2. Les traces d'un plan et la projection horizontale d'une droite de ce plan étant données, construire les pro-

jections d'un cylindre tangent à ce plan et parallèle à la droite donnée, en supposant, en outre, que sa trace horizontale est une circonférence de cercle passant par deux points, donnés sur le plan horizontal de projection.

3. Mener, parallèlement à une droite donnée ou par un point donné, un plan tangent à un cylindre, qui a pour directrice droite une parallèle au plan vertical, pour directrice courbe une ellipse, dont la projection horizontale est un cercle et la projection verticale une ligne droite.

On résout facilement ces problèmes, en déterminant les projections de la tangente à l'ellipse directrice, située dans le plan tangent cherché.

CHAPITRE III.

Plans tangents aux surfaces coniques.

La surface d'un cône est engendrée par le mouvement d'une ligne droite assujettie à rencontrer une ligne courbe de forme quelconque et à passer par un point fixe, qu'on appelle le *centre* de la surface conique ou le *sommet* du cône.

La surface d'un cône est déterminée lorsqu'on connaît son centre et sa directrice : car, en joignant par des lignes droites ce centre aux points de la directrice, on construit les différentes positions de la génératrice. Les traces de ces droites sur les deux plans de projection déterminent la trace horizontale et la trace verticale de la surface conique. Je supposerai, dans ce qui suit, la surface d'un cône toujours donnée par son centre et sa trace horizontale.

PROBLÈME I.

Construire un plan tangent à un cône et parallèle à une droite donnée.

Soient (fig. 75) ABC la trace horizontale du cône ; s, s', les projections de son sommet, et de, $d'e'$, les projections de la droite à laquelle le plan tangent doit être parallèle.

Du sommet S, je trace la droite (fg, $f'g'$) parallèle à la

droite donnée, et je conduis, par cette ligne FG, un plan (fA, g') dont la trace horizontale fA soit tangente à la base ABC du cône. Ce plan touche la surface conique le long de la génératrice SA, car il contient cette droite et la tangente fA à la courbe ABC.

Ce problème a autant de solutions qu'on peut mener de tangentes à la courbe ABC par la trace horizontale f de la droite FG.

Scholie. — Si la droite donnée DE est verticale, le plan tangent l'est aussi, et il a pour trace horizontale une tangente à la base du cône menée par la projection horizontale du sommet S. La génératrice par laquelle ce plan touche alors le cône fait partie du contour apparent du cône sur le plan horizontal : car, le cône étant tout entier d'un côté du plan tangent, sa projection horizontale se trouve aussi du même côté de la trace horizontale de ce plan, qui projette horizontalement la génératrice de contact. D'où je conclus ce théorème : Le contour apparent d'un cône ABC (fig. 76) sur le plan horizontal est le système des deux tangentes sA, sB, menées à la base ABC par la projection horizontale du sommet S.

Je démontrerais de même que le contour apparent de ce cône sur le plan vertical se compose des deux traces verticales $s'c'$, $s'd'$, des plans tangents au cône et perpendiculaires au plan vertical. Par conséquent, pour construire les droites $s'c'$, $s'd'$, il faut mener à la courbe ABC les tangentes Dd', Cc', perpendiculaires à la ligne de terre, et joindre par des droites la projection verticale s' du sommet du cône aux points c', d', où ces tangentes rencontrent la ligne de terre LT.

PROBLÈME II.

Mener un plan tangent à un cône par un point de sa surface.

Soient (fig. 77) ABC la trace horizontale du cône; s, s', les projections de son sommet, et m la projection horizontale d'un point de sa surface.

Je trace la droite ms. Le plan vertical conduit par cette droite rencontre la surface du cône suivant deux génératrices SA, SB, dont les traces horizontales sont les points d'intersection des lignes ms et ABC. Pour construire les projections verticales de ces génératrices, je projette les points A, B, sur le plan vertical, et je joins par des droites les points a', b', à la projection verticale s' du sommet. Je détermine ensuite les projections verticales m' et n' des points de la surface qui ont pour projection horizontale le point m, et sont situés sur les génératrices SA, SB.

La construction du plan tangent au point M de la surface conique est alors ramenée à conduire par la droite SA un plan dont la trace horizontale soit tangente à la courbe ABC, au point donné A.

Le plan, tangent au point N, est déterminé par des conditions semblables. Lorsque l'on a construit ces deux plans, leur intersection doit passer par le sommet du cône.

PROBLÈME III.

Mener un plan tangent à un cône par un point extérieur à sa surface.

Soient (fig. 78) ABC la trace horizontale du cône; s, s',

les projections de son sommet, et m, m', celles du point donné.

Il est évident que la droite qui joint le point M au sommet S du cône est située dans le plan tangent : donc, pour résoudre le problème proposé, il faut tracer les projections de la droite MS, et conduire par cette droite un plan dont la trace horizontale soit tangente à la base ABC du cône.

Ce problème a autant de solutions qu'on peut mener de tangentes à la courbe ABC par la trace horizontale d de la droite SM.

PROBLÈME IV.

Construire un plan tangent à deux cônes qui ont la même trace horizontale.

Tracez les projections de la droite qui passe par les sommets des cônes donnés, et conduisez par cette ligne un plan dont la trace horizontale soit tangente à la base des deux cônes.

Ce problème a autant de solutions qu'on peut mener de tangentes à cette base par la trace horizontale de la droite qui joint les sommets des deux cônes.

PROBLÈME V.

Construire un plan tangent à deux cônes qui ont le même sommet.

La trace horizontale du plan cherché est une tangente commune aux bases des deux cônes ; quant à sa trace verticale, elle est déterminée par les traces verticales des

génératrices suivant lesquelles le plan touche chacun des cônes.

Ce problème a autant de solutions qu'on peut mener de tangentes communes aux bases des cônes.

PROBLÈME VI.

Mener un plan tangent à une surface développable par un point de cette surface.

Quel que soit le mode de génération de la surface, construisez sa trace horizontale, et sa génératrice rectiligne passant par le point donné. Menez ensuite, par le point où cette génératrice rencontre le plan horizontal, une tangente à la trace horizontale de la surface. Le plan de cette tangente et de la génératrice est tangent à la surface développable au point donné.

Scholie. — Pour déterminer, dans cette épure, la trace horizontale du plan tangent, il suffit de construire la trace horizontale d'une génératrice infiniment voisine de la génératrice qui passe par le point donné, et de joindre par une droite les traces horizontales de ces deux lignes. Car, dans la pratique, on peut considérer une ligne courbe comme une ligne polygonale dont les côtés sont très petits.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

1. Construire un plan qui soit tangent à un cône donné et fasse avec le plan horizontal de projection un angle donné.

2. Construire un plan qui soit tangent à un cylindre

donné et forme avec le plan horizontal de projection un angle aussi donné.

3. Les traces d'un plan étant données, construire les projections d'un cône à base circulaire et tangent à ce plan, lorsqu'on donne la projection horizontale de son sommet et deux points de la circonférence de sa base.

4. Mener, parallèlement à une droite donnée ou par un point donné, un plan tangent à un cône qui a pour directrice une ellipse, dont la projection horizontale est un cercle et la projection verticale une ligne droite; la droite qui joint le sommet du cône au centre de l'ellipse étant parallèle au plan vertical.

Solution analogue à celle du problème 3, p. 115.

CHAPITRE IV.

Plans tangents aux surfaces gauches.

PROBLÈME I.

Mener un plan tangent à l'hyperboloïde à une nappe par un point de sa surface.

Soient (fig. 79) AB, A′B′, A″B″, les trois directrices rectilignes de l'hyperboloïde. Pour construire les projections d'une position particulière de la génératrice de cette surface, je considère comme donné le point où cette droite coupe l'une des directrices, et je trace par ce point une droite qui rencontre les deux autres.

Si CD est une génératrice ainsi déterminée et que M soit un point de cette droite par lequel il s'agit de mener un plan tangent à l'hyperboloïde; je construis deux autres génératrices EF, GH, de la surface, et je trace par le point M la droite MN, de sorte qu'elle rencontre les lignes EF, GH. Cette droite MN, qui s'appuie sur trois génératrices CD, EF, GH, du premier mode de génération rectiligne de la surface gauche, est la génératrice rectiligne passant par le point M dans le second mode de génération rectiligne : donc le plan des droites CD, MN, est tangent au point M de l'hyperboloïde à une nappe.

PROBLÈME II.

Mener un plan tangent en un point d'une surface gauche dont les trois directrices sont des lignes quelconques.

Soient (fig. 80) ABC, A'B'C', A''B''C'', les trois directrices de la surface gauche donnée. Pour construire les projections d'une position particulière de la génératrice, je regarde comme donné le point où cette droite coupe l'une des directrices, et je détermine les traces horizontales de deux cônes ayant pour sommet commun le point donné et pour directrices les deux autres directrices de la surface gauche. En joignant leur sommet aux points de rencontre de leurs traces horizontales, je construis les génératrices rectilignes de la surface gauche qui passent par le point donné.

Si CC'C'' est une génératrice rectiligne ainsi déterminée, et que M soit un point de cette droite par lequel il s'agit de mener un plan tangent à la surface gauche, je trace, par les points C, C', C'', où cette génératrice rencontre les trois directrices, les droites CD, C'D', C''D'', respectivement tangentes à ces courbes, et je construis le plan tangent au point M de l'hyperboloïde à une nappe qui a pour directrices rectilignes les trois tangentes CD, C'D', C''D''. Ce plan est aussi tangent à la surface gauche donnée, parce que cette surface et l'hyperboloïde se raccordent le long de la génératrice commune MC.

En effet, il est d'abord évident que ces deux surfaces ont les mêmes plans tangents aux trois points C, C', C''; en second lieu, si je considère les directrices données comme des lignes polygonales, leurs côtés, infiniment pe-

tits, qui passent par les points C, C′, C″, se confondant avec les tangentes CD, C′D′, C″D″, les deux surfaces gauches coïncident dans une étendue infiniment petite, le long de la génératrice MC, et, par conséquent, elles ont le même plan tangent en chacun des points de cette droite MC.

Scholie. — Si deux surfaces gauches quelconques ont une génératrice commune et les mêmes plans tangents en trois points de cette génératrice, elles se raccordent en tous les points de cette droite : car chacune de ces surfaces peut être raccordée avec le même hyperboloïde à une nappe, qui aurait pour directrices trois droites, tracées dans les trois plans tangents par leurs points de contact.

PROBLÈME III.

Mener un plan tangent au paraboloïde hyperbolique par un point de sa surface.

Soient (fig. 81) PQ le plan directeur, et AB, A′B′, les directrices rectilignes du paraboloïde. Pour construire les projections d'une position particulière de la génératrice, je suppose donné le point où cette droite rencontre l'une des directrices, et je mène par ce point un plan parallèle au plan directeur. La droite qui joint le point donné au point d'intersection de ce plan et de l'autre directrice est la génératrice cherchée.

Soient CC′ une génératrice du paraboloïde ainsi déterminée, et M un point de cette droite par lequel il faut mener un plan tangent à cette surface. Je conduis par la directrice A′B′ un plan A′B′E′ parallèle à AB, et je trace par le point M une droite MN, parallèle au plan A′B′E′ et

rencontrant une seconde génératrice DD′ du paraboloïde. La droite MN est la génératrice qui passe par le point M dans le second système de génération rectiligne de la surface gauche : donc le plan des deux droites CC′, MN, est tangent à cette surface au point M.

PROBLÈME IV.

Mener un plan tangent en un point d'une surface gauche quelconque qui a un plan directeur.

Soient (fig. 82) PQ le plan directeur, et ACB, A′C′B′, les deux directrices de la surface gauche donnée. Pour construire les projections d'une génératrice de cette surface, je regarde comme donné le point où cette droite rencontre l'une des directrices, et je mène par ce point un plan parallèle au plan directeur. La droite qui joint le point donné au point d'intersection de ce plan et de l'autre directrice est la génératrice cherchée.

Si CC′ est une génératrice ainsi construite, et que M soit un point de cette droite par lequel il s'agit de mener un plan tangent à la surface gauche; je trace, par les points C, C′, où la droite CC′ rencontre les directrices ACB, A′C′B′, les droites CD, C′D′, respectivement tangentes à ces courbes, et je mène un plan tangent au point du paraboloïde hyperbolique qui a pour plan directeur le plan PQ et pour directrices les droites CD, C′D′. Ce plan est aussi tangent à la surface gauche donnée, car cette surface et le paraboloïde hyperbolique se raccordent le long de la génératrice commune CC′. (Voir pour la démonstration du raccordement le problème II de ce chapitre.)

Scholie Ier, relatif aux deux problèmes précédents. —

Dans l'épure de chacun de ces problèmes, il faut prendre le plan directeur pour plan horizontal : alors tout plan horizontal rencontrera les directrices droites ou courbes de la surface gauche en des points dont les projections verticales seront les intersections de la trace de ce plan et des projections verticales des directrices.

Scholie II. — Si deux surfaces gauches, à plan directeur, ont une génératrice commune et les mêmes plans tangents en deux points de cette génératrice, elles se raccordent en tous les points de cette droite : car chacune de ces surfaces peut être raccordée, le long de la même génératrice, avec le même paraboloïde hyperbolique, qui aurait pour plan directeur un plan parallèle à l'intersection des plans directeurs des surfaces données, et pour directrices deux droites tracées dans les deux plans tangents par leurs points de contact.

PROBLÈME V.

Mener un plan tangent à une surface gauche parallèlement à une ligne droite donnée AB.

Conduisez un plan par une génératrice quelconque de la surface gauche parallèlement à la droite AB, et ce plan sera tangent à cette surface. (Voyez le théorème VII du chap. I[er] de ce livre pour la détermination du point de contact de ce plan.)

Scholie. Ce problème est indéterminé. — Si, par les points de contact des différents plans tangents à la surface gauche et parallèles à la droite AB, vous menez des parallèles à cette ligne, ces droites sont les génératrices d'une surface cylindrique qui se raccorde avec la surface

gauche par la ligne des points de contact des plans tangents. Ce cylindre est *circonscrit* à la surface gauche.

PROBLÈME VI.

Mener un plan tangent à une surface gauche par un point A extérieur à cette surface.

Conduisez un plan par le point A et une génératrice quelconque de la surface gauche, ce plan sera tangent à la surface.

Scholie. Ce problème est indéterminé. — Si vous joignez au point A les points de contact des différents plans tangents à la surface gauche qui passent par le point A, ces droites sont les génératrices d'un cône qui se raccorde avec la surface gauche par la ligne des points de contact des plans tangents. Ce cône est *circonscrit* à la surface gauche.

PROBLÈME VII.

Mener, par une droite donnée, un plan tangent à une surface gauche.

1° Construisez le cylindre circonscrit à la surface gauche et parallèle à la droite donnée, puis tracez par cette droite un plan tangent au cylindre : ce plan sera aussi tangent à la surface gauche au point d'intersection des deux génératrices de ces surfaces qu'il contient.

2° Circonscrivez à la surface gauche un cône dont le sommet soit un point quelconque de la droite donnée; et conduisez, par cette droite, un plan tangent au cône.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

1. Mener un plan tangent en un point d'un conoïde qui a pour plan directeur le plan horizontal, et pour directrices une perpendiculaire à ce plan et une circonférence de cercle située dans le plan vertical.

2. Trois droites, l'une parallèle à la ligne de terre et les deux autres perpendiculaires à cette droite dans chacun des plans de projection, étant données, mener un plan tangent en un point de l'hyperboloïde à une nappe dont ces droites sont les directrices. — Si la directrice parallèle à la ligne de terre était dans le plan bissecteur de l'un des angles dièdres formés par les plans de projection, la surface gauche serait-elle de révolution?

3. Deux droites non parallèles étant données, l'une dans le plan horizontal et l'autre dans le plan vertical, mener un plan tangent en un point du paraboloïde hyperbolique qui a pour directrices les deux droites données et pour plan directeur un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

4. Construire un plan tangent à une surface gauche dont les trois directrices sont une ligne droite et deux circonférences de cercles parallèles.

CHAPITRE V.

Plans tangents aux surfaces de révolution. Surfaces du second ordre.

1. On appelle surface de révolution toute surface engendrée par le mouvement d'une ligne quelconque, plane ou à double courbure, tournant autour d'une ligne droite, qui est l'*axe* de la surface.

Les sections faites dans une surface de révolution par des plans perpendiculaires à l'axe sont des circonférences de cercle ayant leurs centres situés sur l'axe. On leur a donné le nom de *parallèles* de la surface.

Tout plan passant par l'axe est un méridien ; il coupe la surface suivant une ligne qu'on nomme *méridienne*. Une surface de révolution est déterminée par son axe de rotation et sa ligne méridienne.

On démontre, en géométrie (1), que tout plan tangent à une surface de révolution est perpendiculaire au méridien qui passe par le point de contact, et, par conséquent, que la normale en ce point rencontre l'axe.

2. La ligne $n'_1c'm'_1d'$ (fig. 83) étant la méridienne et la droite $a'b'$ l'axe d'une surface de révolution, je mène par le point m'_1 la tangente m'_1b' et la normale m'_1a' à la courbe $n'_1c'm'_1$. Je trace ensuite une circonférence de cercle, du

(1) Livre VII de ma Géométrie.

point a' comme centre, avec la normale $a'm'_1$ pour rayon ; puis je fais tourner le plan de la ligne méridienne autour de l'axe AB. La tangente m'_1b' engendre un cône de révolution dont le sommet est sur l'axe, et la circonférence de cercle, une sphère. Ces deux surfaces se raccordent avec la surface de révolution en tous les points du parallèle que décrit le point m'_1, car les plans tangents à la sphère et au cône en tout point de ce parallèle qui leur est commun avec la surface de révolution, contiennent les tangentes au parallèle et au méridien passant par ce point.

3. Si, par les points de la ligne méridienne d'une surface de révolution, je trace des perpendiculaires au méridien correspondant, ces droites forment une surface cylindrique qui se raccorde avec la surface donnée en tous les points de la ligne méridienne, car le plan tangent au cylindre en chaque point de cette ligne contient les tangentes au méridien et au parallèle passant par ce point.

4. Je supposerai, en général, la surface de révolution donnée par sa ligne méridienne et par son axe, que je prendrai vertical. Dans cette position de la surface, l'un des méridiens est parallèle au plan vertical, et, par conséquent, se projette en vraie grandeur sur ce plan ; je le désignerai par le nom de *méridien principal*. Il est évident que le cylindre qui se raccorde à la surface de révolution par le méridien principal est perpendiculaire au plan vertical, tandis que le cylindre qui se raccorde avec cette surface par le plus grand parallèle est perpendiculaire au plan horizontal.

Par conséquent : 1° *La projection verticale du méridien principal est le contour apparent de la surface de révolution sur le plan vertical.*

2° *La projection horizontale du plus grand parallèle est le contour apparent de la surface sur le plan horizontal.*

PROBLÈME I.

Mener un plan tangent à une surface de révolution par un point de sa surface.

Soient (fig. 83) ab, $a'b'$, les projections de l'axe, que je suppose vertical ; $m'_1c'n'_1d'$ la projection verticale du méridien principal, et m la projection horizontale du point de la surface de révolution par lequel il s'agit de mener un plan tangent.

Pour déterminer la projection verticale du point donné M, je fais tourner, autour de l'axe AB, le méridien qui passe par ce point et dont la trace horizontale est la droite am, jusqu'à ce qu'il coïncide avec le méridien principal. Le point M se projette alors sur les projections horizontale et verticale cd, $m'_1c'n'_1d'$, de la ligne méridienne donnée ; par conséquent, si m_1 est sa nouvelle projection horizontale, j'aurai sa projection verticale en traçant, du point m_1, la perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de la courbe $m'_1c'n'_1d'$. Or ces lignes se coupent en deux points m'_1, n'_1, dans la figure ci-jointe : donc la surface donnée a deux points, M et N, qui ont la même projection horizontale m. En ramenant le méridien (M, AB) dans sa position primitive, je trouverai les projections verticales m', n', des points M et N correspondant à la projection horizontale donnée m.

Cela posé, je vais construire le plan tangent au point (m, m') de la surface de révolution.

1[re] *Solution.* — Je trace, par le point m'_1, la tangente

$m'_1o'_1$ à la courbe $m'_1c'd'$ jusqu'à la rencontre b' de la projection verticale de l'axe AB, et je considère la droite (bm_1, $b'm'_1$) comme la génératrice d'une surface conique de révolution ayant pour centre le point b'. Cette surface conique se raccorde avec la surface de révolution donnée suivant le parallèle décrit par le point M, qui leur est commun : car, en tout point de ce parallèle, la génératrice du cône coïncide avec la tangente au méridien passant par ce point. Par conséquent le problème est ramené à construire un plan tangent au cône en un point donné M de sa surface.

Pour cela, je mène, par la trace horizontale o de la génératrice BM, la droite PR tangente au cercle ao, c'est-à-dire à la base du cône. Cette droite est la trace horizontale du plan tangent cherché; et, pour en construire la trace verticale, je joins, par la droite P'R', le point d'intersection des lignes PR, LT, à la trace verticale de l'une des droites de ce plan, par exemple de l'horizontale MS.

2e *Solution.* Comme les normales à la surface de révolution menées par les différents points du parallèle que décrit le point M concourent au même point de l'axe AB, si je trace la normale m'_1a' à la courbe $m'_1c'n'_1d'$, et que je joigne le point m' au point d'intersection des droites m'_1a' et $a'b'$, la droite (ma, $m'a'$) sera normale à la surface de révolution, et, par conséquent, perpendiculaire au plan tangent cherché. Donc la question proposée est ramenée à tracer par le point M un plan perpendiculaire à la droite MA.

Scholie. — Je construirais, par l'un de ces deux procédés, le plan tangent au point N de la surface de révolution.

PROBLÈME II.

Par un point extérieur à une surface de révolution mener un plan qui la touche sur un parallèle donné.

Déterminez le sommet et la trace horizontale du cône qui se raccorde avec la surface de révolution suivant le parallèle donné, et menez, par le point aussi donné, un plan tangent au cône. Ce plan touchera la surface de révolution sur le parallèle commun à cette surface et au cône.

Scholie. — Par un point extérieur à une surface de révolution on ne peut mener que deux plans tangents à cette surface et tels que leurs points de contact soient situés sur un parallèle donné.

PROBLÈME III.

Mener par un point extérieur à une surface de révolution un plan qui soit tangent à cette surface sur un méridien donné.

Je circonscris à la surface de révolution un cylindre qui se raccorde avec elle suivant le méridien donné, et je mène, par le point donné, un plan tangent à ce cylindre.

Pour faire cette construction, il faut d'abord déterminer la trace verticale du cylindre, en menant, par les différents points de la circonférence du méridien donné, des perpendiculaires à son plan, et en construisant les traces verticales de ces droites qui toutes sont horizontales.

Scholie — On peut éviter, dans tous les cas, la construction de la trace verticale du cylindre circonscrit, en faisant tourner le point et le méridien donné jusqu'à ce que ce méridien coïncide avec le méridien principal. Alors, le cylindre circonscrit ayant pour trace verticale la projection verticale donnée du méridien principal, on construira les traces du plan tangent à ce cylindre et passant par le petit point donné, puis on ramènera le méridien et le plan tangent dans leurs positions primitives.

PROBLÈME IV.

Mener, parallèlement à une droite donnée, un plan qui soit tangent à une surface de révolution sur un parallèle donné.

Circonscrivez à la surface de révolution un cône qui la touche par le parallèle donné, et menez, parallèlement à la droite donnée, un plan tangent à ce cône.

Scholie. — Ce problème a une ou deux solutions, ou bien il est impossible.

PROBLÈME V.

Mener, parallèlement à une droite donnée, un plan qui soit tangent à une surface de révolution sur un méridien donné.

Je circonscris à la surface de révolution un cylindre qui la touche par le méridien donné et je mène parallèlement à la droite donnée un plan tangent à ce cylindre.

Comme dans le problème III de ce chapitre, il faut éviter la construction de la trace verticale du cylindre circonscrit, en ramenant le méridien donné à coïncider avec le méridien principal, par une rotation effectuée autour de l'axe de la surface.

Scholie. — Ce problème est indéterminé lorsque la droite donnée est perpendiculaire au méridien donné.

PROBLÈME VI.

Mener un plan tangent à une surface de révolution et parallèle à un plan donné.

Le méridien qui passe par le point de contact du plan tangent est perpendiculaire au plan donné, et le coupe suivant une droite parallèle au plan tangent. Donc, si je mène, par l'axe de la surface, un plan perpendiculaire au plan donné et que je construise les projections de leur intersection, je ramènerai le problème à tracer, parallèlement à une droite donnée, un plan qui soit tangent à la surface de révolution sur un méridien donné.

PROBLÈME VII.

Mener par une droite donnée un plan tangent à une surface de révolution.

1[re] *Solution.* — Je circonscris à la surface de révolution un cylindre parallèle à la droite donnée, et je mène par cette droite un plan tangent au cylindre.

Pour construire l'une des traces de ce cylindre, par

exemple sa trace horizontale, je conduis, parallèlement à la droite donnée, un plan tangent à la surface de révolution sur un parallèle quelconque, et je tire, par le point de contact de ce plan, une droite parallèle à la ligne donnée. Cette droite, entièrement située dans le plan tangent, est une génératrice du cylindre circonscrit, et sa trace horizontale, un point de la section faite dans ce cylindre par le plan horizontal. En répétant cette construction pour chacun des parallèles de la surface de révolution, je déterminerai successivement les points de la trace horizontale du cylindre.

J'aurais pu remplacer dans cette construction les parallèles de la surface de révolution par ses méridiens.

2e *Solution.* — Je circonscris à la surface de révolution un cône dont le sommet soit un point quelconque de la droite donnée, et je mène, par cette droite, un plan tangent au cône.

Pour construire l'une des traces de ce cône, par exemple sa trace horizontale, je prends un point S de la droite donnée, et je mène, par ce point, un plan tangent à la surface de révolution sur un parallèle quelconque; puis je joins par une ligne droite le point de contact de ce plan au point S. Cette droite, entièrement située dans le plan tangent, est une génératrice du cône circonscrit à la surface de révolution et ayant le point S pour sommet; donc sa trace horizontale est un point de l'intersection du cône et du plan horizontal. En répétant cette construction pour chacun des parallèles de la surface, je déterminerai les différents points de la trace horizontale du cône.

Comme dans la solution précédente, je puis rempla-

cer les parallèles de la surface de révolution par ses méridiens.

3e *Solution.* — Je circonscris à la surface de révolution deux cônes ayant leurs sommets sur la droite donnée; puis je mène un plan par cette droite et chacun des points d'intersection des lignes suivant lesquelles les deux cônes touchent la surface de révolution. Ce plan est tangent à cette surface, puisqu'il est tangent à chacun des cônes qui lui sont circonscrits.

Cette solution n'exige pas la détermination des traces des cônes, il suffit de construire les projections de leurs lignes de contact avec la surface de révolution. On pourrait remplacer l'un des cônes par le cylindre circonscrit à cette surface et parallèle à la droite donnée. C'est *Lacroix* qui a donné cette solution de ce problème.

PROBLÈME VIII.

Une surface gauche de révolution étant donnée par son axe et sa génératrice rectiligne, mener un plan tangent en un point de cette surface.

Soient *ab*, *a'b'*, les projections d'un axe vertical, et *cd*, *c'd'*, les projections d'une ligne droite parallèle au plan vertical. Si je suppose la droite CD invariablement liée à l'axe AB, et que je la fasse tourner autour de cet axe, elle engendre une surface connue sous le nom d'*hyperboloïde de révolution à une seule nappe*, ou de *surface gauche de révolution*. Je vais exposer rapidement les principales propriétés de cette surface.

1° Parmi les parallèles de la surface gauche de révolution,

exemple sa trace horizontale, je conduis, ... a
à la droite donnée, un plan tangent à la su... on
lution sur un parallèle quelconque, e... la
point de contact de ce plan, une droite ... ion
donnée. Cette droite, entièrement si... de
gent, est une génératrice du cyli...
trace horizontale, un point de l... ad,
lindre par le plan horizontal. ... des
tion pour chacun des parallè... la pa-
je déterminerai successive... nt d'. Je re-
rizontale du cylindre. ... horizontalement la

J'aurais pu rempla... positions est à une di-
rallèles de la surface ... AB, et que, par conséquent,

2e *Solution.* — ... ue la génératrice est toujours tan-
un cône dont le
droite donnée ... trace horizontale de CD ; je décris, du point
gent au côn... centre, le cercle *ac*, qui est la trace horizontale

Pour ce... surface gauche de révolution. Ce cercle rencontre la
ple sa tr... droite *ab* en deux points *c*, *e*; je projette le point *e* sur le
donné... plan vertical, et je dis qu'en faisant tourner la droite
surf... (*d*, *d'*) autour de l'axe AB, elle engendrera la même
je ... surface que la droite CD. En effet, les lignes CD, ED,
e... étant symétriquement placées par rapport au plan *aa'b'*,
mené par l'axe AB perpendiculairement à la ligne de
terre, si je considère, sur ces droites, deux points quelconques également éloignés du plan horizontal, c'est-à-dire symétriques relativement au plan *aa'b*, ces points sont à la même distance de l'axe AB, et, par conséquent, ils décrivent des parallèles égaux. Donc la surface gauche de révolution a deux systèmes de génératrices rec-

...ment le même angle avec le plan du col-
... inverse, et sont également distantes de

...), qui est à la fois le centre de la
...on et de son collier, je trace
... rectilignes d'un même sys-
...e de révolution autour
...s font le même angle
...ulaire au plan du collier.
...ométrie analytique, 1° que ce
... la surface gauche de révolution;
...s faites par le même plan dans ces sur-
...es courbes semblables.

...e contour apparent de la surface gauche de révolution ...ur le plan vertical est une hyperbole égale à la section faite dans cette surface par le méridien parallèle au plan vertical de projection. Cette hyperbole a pour axe la projection verticale du collier, et pour asymptotes les droites $a'c'$, $a'e'$, parallèles aux génératrices du cône asymptote, qui sont situées dans le méridien principal. Les points d'intersection de cette hyperbole et des différentes positions de la génératrice divisent cette droite en deux parties, dont l'une est visible et l'autre cachée.

Quant au contour apparent de la même surface, par rapport au plan horizontal, il est évident qu'il est formé par la circonférence ad seule, puisque la surface est infinie dans tous les sens autour de l'axe AB, et qu'elle est circonscrite au cylindre vertical qui aurait pour directrice courbe le collier de cette surface. Si l'on considère une partie de l'hyperboloïde, limitée par les deux paral-

lèles égaux au cercle *ac*, le contour apparent de cette portion est le système des deux circonférences *ad* et *ac*.

Cela posé, soit *m* la projection horizontale d'un point M de la surface gauche de révolution par lequel il s'agit de mener un plan tangent. Ce plan étant déterminé par les deux génératrices de systèmes différents qui passent par le point M, je construis d'abord les projections de ces droites. J'obtiens immédiatement leurs projections horizontales en traçant par le point *m* les tangentes *mf*, *mg*, au cercle *ad*, c'est-à-dire à la projection horizontale du collier. Mais les lignes *mf*, *mg*, rencontrent en quatre points *h*, *k*, *o*, *p*, la circonférence de cercle *ac*, trace horizontale de la surface gauche de révolution : donc cette surface a quatre génératrices, dont ces quatre points sont les traces horizontales. Celles qui passent par les deux points *h* et *o* appartiennent aux deux systèmes de génération rectiligne, puisqu'elles sont inclinées en sens contraire sur le plan horizontal, parallèle au plan du collier. Il en est de même des deux autres génératrices partant des points *k* et *p*. Pour déterminer les projections verticales de ces droites, je projette leurs traces horizontales sur le plan vertical, ainsi que leurs points d'intersection F et G avec la circonférence du cercle de gorge.

Les projections verticales $f'h'$, $g'o'$, des deux génératrices F*h*, G*o*, se rencontrent en un point m', qui est la projection verticale du point M. Pareillement les projections verticales $k'f'$, $p'g'$, déterminent, par leur intersection n', la projection verticale d'un second point N de la surface gauche, ayant aussi le point donné *m* pour projection horizontale.

Le plan tangent au point M contient les deux génératrices F*h*, G*o* : donc il a pour trace horizontale la droite *oh*; sa trace verticale est déterminée par les traces verticales des lignes F*h* et G*o*. Je construirai de même les traces du plan tangent au point N qui passe par les deux droites F*k* et G*p*. Ces deux plans coupent le cercle de gorge de la surface gauche suivant la même droite FG, dont les projections sont connues. En construisant la trace verticale *r'* de cette droite, j'aurai le point d'intersection des traces verticales de ces plans. C'est ce point qu'on emploie ordinairement pour la construction de ces traces, parce qu'il arrive souvent que les points de rencontre des génératrices avec le plan vertical sont hors des limites de l'épure.

PROBLÈME IX.

Circonscrire, à une surface du second ordre et de révolution, un cône dont le sommet est donné.

Je remarque 1° que, lorsqu'un cône est circonscrit à une surface quelconque du second ordre, la ligne de contact de ces surfaces est une ellipse, ou une hyperbole, ou bien une parabole; 2° que, dans une surface du second ordre et de révolution, le plan conduit par l'axe de cette surface et par le sommet du cône circonscrit est perpendiculaire au plan de la ligne de contact, dont l'un des axes coïncide avec l'intersection de ces plans. Par conséquent, si le sommet du cône est situé dans le plan mené par l'axe parallèlement au plan vertical, la projection verticale de

la ligne de contact de la surface donnée et du cône circonscrit sera une ligne droite.

Soient (fig. 96) *ab*, *a'b'*, les projections de l'axe de la surface donnée, *c'e'd'f'* la projection verticale de son méridien principal, et *s*, *s'*, les projections du sommet du cône, que je suppose dans le plan conduit par l'axe AB parallèlement au plan vertical. Le contour apparent du cône, par rapport au plan vertical, est évidemment le système des deux tangentes au méridien principal de la surface de révolution menées par le sommet S : donc, si je trace, par le point *s'*, les tangentes *s'e'*, *s'f'*, à la courbe *c'e'd'f'*, ces lignes seront les projections verticales des deux génératrices qui forment le contour apparent du cône sur le plan vertical, et la droite *e'f'* qui joint les points de contact de ces tangentes sera la projection verticale de la ligne par laquelle le cône touche la surface donnée.

La projection horizontale de la ligne de contact peut être facilement construite par points, puisqu'on connaît la projection verticale de chacun de ses points et le parallèle de la surface sur laquelle il se trouve. Mais il est plus simple de déterminer les principaux éléments de cette ligne, qui est généralement une ellipse ou une hyperbole, ou bien une parabole, et de la tracer ensuite. Ainsi, dans l'épure ci-jointe, la projection de la ligne de contact est une ellipse qui a pour petit axe la projection horizontale *ef* de la droite *e'f'*, et pour grand axe le rayon du parallèle de la surface dont la projection verticale passe par le milieu de *e'f'*. Cette ellipse touche le cercle *ae*, projection horizontale du plus grand parallèle de la surface, en deux

points, qu'on détermine en menant une perpendiculaire à la ligne de terre, par le point de rencontre o' des deux droites $e'f'$ et $c'd'$.

Les projections de la ligne de contact du cône et de la surface de révolution étant ainsi construites, le cône est entièrement déterminé, puisqu'on connaît son sommet et une courbe tracée sur sa surface.

Scholie. — Lorsque le cône circonscrit est elliptique, et que la surface du second ordre est un ellipsoïde ou une hyperboloïde à une seule nappe, on peut prendre pour sa directrice une autre ellipse qui se projette aussi suivant une ligne droite sur le plan vertical, mais dont la projection horizontale est un cercle. En effet, si par l'une quelconque $g'h'$ des diagonales du quadrilatère $g'm'h'k'$ que forment les quatre tangentes $c'c'$, $d'd'$, $s'e'$, $s'f'$, à la courbe du second degré $c'e'd'f'$, je conduis un plan perpendiculaire au plan vertical, il coupera le cône suivant une ellipse dont la projection verticale sera cette diagonale elle-même, et je dis qu'elle a le cercle cd pour projection horizontale. Car, d'après une propriété des courbes du second degré, les diagonales du quadrilatère circonscrit à la courbe $c'e'd'f'$ et les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés passent par le même point o', et, par conséquent, le point O du parallèle CD de la surface de révolution est commun aux deux ellipses $g'h'$, $e'f'$. Donc, le plan $Og'h'$ coupe, suivant la même ellipse, le cône S et le cylindre vertical qui est circonscrit à la surface donnée, c'est-à-dire que l'ellipse $g'h'$ se projette circulairement sur le plan horizontal.

Il est évident que cette méthode de l'*ellipse à projec-*

tions droite et circulaire n'est pas applicable à l'hyperboloïde à deux nappes, puisque cette surface n'a pas de cylindre circonscrit qui soit vertical. Mais on peut l'employer pour circonscrire un cône à un paraboloïde de révolution, parce que toute section elliptique faite dans cette surface se projette circulairement (1) sur tout plan perpendiculaire à l'axe du paraboloïde. Cette propriété remarquable est d'une grande utilité pour la détermination de l'intersection d'un paraboloïde par une autre surface du second degré et de révolution.

PROBLÈME X.

Circonscrire à une surface du second ordre et de révolution un cylindre parallèle à une droite donnée.

Comme la ligne de contact d'un cylindre circonscrit à une courbe du second ordre et de révolution est une ellipse, ou une hyperbole, ou bien une parabole, et que son plan est perpendiculaire à tout plan parallèle à la droite donnée et à l'axe de la surface, ramenez la droite donnée à être parallèle au plan vertical, en la faisant tourner autour de l'axe de la surface donnée, et la projection verticale de la ligne de contact du cylindre sera une ligne droite, déterminée par les points de contact des tangentes à la projection verticale du méridien principal, menées parallèlement à la nouvelle position de la droite donnée. Vous construirez ensuite sa projection horizontale comme celle de la ligne de contact du cône circonscrit, et

(1) Voir la note qui termine ce traité.

le cylindre sera déterminé, puisqu'on connaîtra la direction de ses génératrices et une courbe tracée sur sa surface.

Scholie. — Lorsque la ligne de contact du cylindre est une ellipse et que la surface de révolution est un ellipsoïde ou un hyperboloïde à une seule nappe, les deux droites qui déterminent le contour apparent du cylindre sur le plan vertical et les deux perpendiculaires à la ligne de terre, qui sont tangentes à la projection verticale du méridien principal, forment un parallélogramme circonscrit à cette courbe. On peut considérer chaque diagonale de ce quadrilatère comme la projection verticale d'une ellipse tracée sur le cylindre circonscrit et se projetant suivant un cercle sur le plan horizontal. Alors on prend de préférence cette ellipse à projections droite et circulaire pour la directrice du cylindre.

Cette méthode n'est pas applicable au paraboloïde, ni à l'hyperboloïde, pour les raisons exposées dans le scholie du problème précédent.

PROBLÈME XI.

Mener par une droite donnée un plan tangent à une surface de révolution et du second ordre.

Lorsque la surface donnée est un ellipsoïde ou un hyperboloïde à une nappe, 1° circonscrivez à cette surface un cylindre parallèle à la droite donnée, au moyen d'une ellipse à projections droite et circulaire. Cherchez le point d'intersection du plan de cette ellipse et de la droite donnée, puis tracez par ce point une tangente à l'ellipse. Le plan de cette tangente et de la droite donnée est tangent à la surface.

2°. Circonscrivez à la surface donnée un cône dont le sommet soit un point quelconque de la droite donnée, au moyen d'une ellipse à projections droite et circulaire; construisez le point d'intersection de la droite donnée et du plan de cette ellipse, puis menez par ce point une tangente à cette courbe. Le plan conduit par cette tangente et la droite donnée est tangent à la surface de révolution.

Scholie I. — Si la surface donnée est un paraboloïde, on ne peut lui appliquer que la seconde construction, parce que le cylindre circonscrit à cette surface la touche le long d'une parabole.

Scholie II. — Si la surface donnée est un hyperboloïde de révolution, on remplacera, dans les deux constructions précédentes, l'ellipse à projections droite et circulaire par la courbe de contact du cylindre ou du cône circonscrit, laquelle sera une ellipse, ou une hyperbole, ou bien une parabole.

PLOBLÈMES A RÉSOUDRE.

1. Mener un plan tangent à une sphère par une droite donnée.

2. Mener un plan tangent à deux sphères par un point donné.

3. Mener un plan tangent à trois sphères.

4. Mener un plan tangent à une sphère et à un cylindre.

5. Mener un plan tangent à une sphère et à un cône.

LIVRE IV.

INTERSECTION DES SURFACES COURBES.

Toute ligne courbe, plane ou à double courbure, est généralement considérée comme l'intersection de deux surfaces. Lorsque ces surfaces sont deux cylindres, dont l'un est perpendiculaire au plan horizontal et l'autre au plan vertical, leurs traces sont appelées les projections de la ligne courbe.

La tangente en un point d'une ligne courbe tracée sur une surface quelconque est située dans un plan qui touche la surface en ce point. Par conséquent, pour construire la tangente en un point d'une courbe qui résulte de la pénétration de deux surfaces, il faut mener, par ce point, les plans tangents à ces surfaces, et déterminer ensuite l'intersection de ces deux plans, laquelle sera la tangente cherchée.

Lorsqu'on applique cette méthode à la construction de la tangente d'une ligne courbe déterminée par ses cylindres projetants, le plan tangent au cylindre vertical est perpendiculaire au plan horizontal de projection, et le plan tangent au cylindre horizontal est perpendiculaire au plan vertical; par conséquent, l'intersection de ces plans, c'est-à-dire la tangente à la courbe, a pour projections la trace horizontale du premier plan tangent et la trace verticale du second. De là ce théorème : *La projection horizontale de la tangente à une courbe quelconque est tangente à la projection horizontale de cette courbe.* Il en est de même des projections verticales de ces lignes.

M. *J. Binet* a donné un autre procédé pour construire la tangente à une ligne courbe commune à deux surfaces données. « Il est visible, dit-il (1), que cette tangente est » perpendiculaire à la fois aux deux normales aux sur- » faces proposées, et, par conséquent, elle est perpendi- » culaire à leur plan. Toutes les fois que ce plan sera » d'une construction facile, le problème de déterminer » la tangente à la courbe proposée se ramènera, par » cette considération, à conduire une perpendiculaire à » ce plan. »

CHAPITRE I.

Sections planes des surfaces réglées.

La section faite par un plan dans une surface quelconque est le lieu des points d'intersection du plan et de la génératrice de la surface, considérée dans ses différentes positions. Par conséquent, la construction des sections planes d'une surface réglée revient à la détermination de l'intersection d'une ligne droite et d'un plan.

PROBLÈME I.

1° *Construire la section faite dans un cylindre droit et vertical par un plan perpendiculaire au plan vertical.*

2° *Mener la tangente à la courbe d'intersection.*

(1) Correspondance de l'Ecole Polytechnique, t. III.

3° *Faire le développement de la surface cylindrique, et y rapporter la courbe d'intersection, ainsi que sa tangente.*

1° Soient AB le grand axe et DE le petit axe d'une ellipse que je suppose être la trace horizontale du cylindre donné. Pour simplifier l'épure, je prends la droite AB parallèle à la ligne de terre et je coupe le cylindre par le plan (KH, K'H'), perpendiculaire au plan vertical. La section a pour projection horizontale l'ellipse ADBE, et pour projection verticale la partie $\alpha'\beta'$ de la trace verticale du plan sécant comprise dans le contour apparent $a'f'g'b'$ du cylindre sur le plan vertical.

Pour déterminer la forme et la grandeur de la section, je ramène le plan (KH, K'H') à être parallèle au plan horizontal, en le faisant tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical et passant par le milieu δ' de la droite $\alpha'\beta'$. Alors les nouvelles projections horizontales des différents points de la section forment une ligne courbe $\alpha_1 D\beta_1 E$, identique à la section elle-même. La construction d'un point quelconque de cette courbe, par exemple de celui qui correspond au point M de la section, se fait de la manière suivante : Je regarde comme donnée la projection horizontale m du point M, et je détermine sa projection verticale m' en traçant, du point m, la perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de la trace verticale K'H' du plan sécant; puis je fais tourner le point M autour de l'axe, de telle sorte que sa projection verticale m_1' se trouve sur la parallèle à la ligne de terre menée par le pied δ' de l'axe. La nouvelle projection horizontale m_1 de M est le point cherché.

En répétant cette construction pour un certain nombre de points de la section, et joignant par des droites leurs nouvelles projections horizontales, je forme la courbe $\alpha_1 D \beta_1 E$. Il faut remarquer : 1° les points D, E, correspondant aux points de la section qui sont situés sur l'axe, et, par conséquent, immobiles pendant la rotation; 2° les points α_1, β_1, les plus éloignés de l'axe : je les obtiens en faisant tourner les points de la section dont les projections verticales sont les extrémités de la projection $\alpha'\beta'$ de cette ligne. Lorsque la section est une ellipse, comme dans la question proposée, les quatre points α_1, β_1, D et E, sont les sommets de la courbe cherchée, et suffisent pour la tracer tout entière.

2° La tangente au point M de la section cylindrique se projette horizontalement sur la tangente *mp* à la trace horizontale du cylindre, et verticalement sur la droite $\alpha'\beta'$.

Pour construire la tangente m_1p_1 au point m_1 de la courbe $\alpha_1 D \beta_1 E$, correspondant au point M de la section, je fais tourner la trace horizontale *p* de la droite *mp* autour de l'axe, jusqu'à ce que sa projection verticale se trouve sur la droite $\delta m'_1$, qui est parallèle à LT, et je joins sa nouvelle projection horizontale p_1 au point m_1.

Au lieu de chercher la position que prend après la rotation la trace horizontale de la tangente, il est souvent plus commode de déterminer la projection horizontale *r* du point de rencontre de la tangente et de l'axe, et de la joindre au point m_1. Cette projection s'obtient évidemment en prolongeant la tangente *mp* jusqu'à la rencontre *r* de la projection horizontale DE de l'axe de rotation.

3° La rectification d'une ligne courbe quelconque étant généralement impossible, on considère, dans les applications de la géométrie descriptive, une courbe comme une ligne polygonale dont les côtés sont très petits. Aussi, pour faire le développement de la surface latérale du cylindre donné, je partage la circonférence de sa base, à partir d'un point quelconque B, en arcs assez petits pour qu'ils se confondent sensiblement avec leurs cordes, et je porte les longueurs de ces arcs sur la ligne de terre, dans l'ordre de leur succession sur la courbe ADBE, puis je construis sur la droite BAB, égale à la somme de ces arcs, un rectangle dont la hauteur BG soit la même que celle du cylindre. Ce rectangle représente évidemment le développement de la surface latérale du cylindre sur le plan vertical.

Dans ce développement de la surface cylindrique, sa ligne d'intersection avec le plan donné se transforme en une courbe plane, qu'il est facile de construire par points. Ainsi, pour trouver la position du point M sur le rectangle BG, je trace, par le point m du développement BAB, de l'ellipse ADBE, la perpendiculaire à la droite LT, jusqu'à la rencontre de la parallèle à la même droite LT menée par la projection verticale m' du point de la section. L'intersection de ces deux lignes est le point cherché, puisque la distance de M au plan horizontal est égale à la distance de sa projection verticale m' à la ligne de terre.

En appliquant cette construction aux différents points de la section cylindrique, je détermine sa transformée $\beta\delta\alpha\varepsilon\beta$, qui a un point minimum et deux points maxima, correspondant au point le plus bas et au point le plus

élevé de la section. Pour tracer la tangente en un point quelconque M de cette courbe, je considère le développement de la surface cylindrique comme étant fait sur le plan tangent au point M, et je remarque : 1° que, la section et sa tangente au point M ayant un élément commun, cette courbe et sa transformée sur le plan tangent ont aussi cet élément commun et, par conséquent, la même tangente au point M ; 2° que le développement de l'ellipse ADBE coïncide avec la projection horizontale *mp* de la tangente au point M de la section. J'en conclus qu'en prenant sur la droite BAB, à partir de *m* et dans le sens *m*A, une longueur égale à *mp*, et traçant la droite M*p*, cette ligne sera tangente au point M de la courbe $\beta\delta\alpha\varepsilon\beta$.

Il est évident que les tangentes aux points α et β sont parallèles à la ligne de terre. La transformée a deux points d'inflexion δ et ε correspondant aux extrémités du petit axe de la section cylindrique : on le reconnaît facilement en supposant le développement de la surface effectué sur le plan tangent au point E du cylindre, car deux points de la section tels que M et N, situés de différents côtés de le génératrice Eε se trouvent, après le développement, l'un au-dessous et l'autre au-dessus de la tangente au point ε, laquelle se projette verticalement sur $\alpha'\beta'$.

Scholie. — La transformé $\beta\delta\alpha\varepsilon\beta$ a pour équation

$$y=\frac{\tang\alpha}{r}\sin x,$$

en prenant pour origine des axes le point d'inflexion ε, et pour axes la parallèle et la perpendiculaire à la droite

BAB. L'angle α mesure l'inclinaison du plan sécant sur la base du cylindre dont le rayon est égal à r.

PROBLÈME II.

1° *Construire la section droite d'un cylindre oblique.*
2° *Mener la tangente à la courbe d'intersection.*
3° *Faire le développement de la surface, et y rapporter la circonférence de la base du cylindre, ainsi que ses tangentes.*

1° Soient ABC la trace horizontale d'un cylindre oblique, et hi, $h'i'$, les projections de sa directrice droite; je coupe ce cylindre par le plan (FG,F'G'), perpendiculaire à ses génératrices, et je vais construire la section, en changeant les plans de projection.

Je prends d'abord un nouveau plan vertical qui soit perpendiculaire au plan sécant; il en résulte que la ligne de terre L_1T_1 est perpendiculaire à la trace horizontale FG de ce plan. Je détermine alors la nouvelle projection verticale $p'_1q'_1u'_1x'_1$ du cylindre, ainsi que la projection horizontale $rosm$ de la section faite dans le cylindre pour le plan (FG, $F'_1G'_1$). Je prends ensuite le plan sécant pour nouveau plan horizontal. La nouvelle ligne de terre L_2T_2 est la trace verticale $F'_1G'_1$ de ce plan, et la nouvelle projection horizontale $r_2o_2s_2m_2$ de la section est la section elle-même.

2° La tangente en un point quelconque (mm'_1) de la section cylindrique a pour projection verticale la trace $F'_1G'_1$ du plan donné, et pour projection horizontale la droite mv qui joint le point m à l'intersection v des traces

horizontales du plan sécant et du plan tangent au point (m, m'_1) de la surface cylindrique.

En déterminant la projection horizontale v_2 du point v sur le second plan horizontal, et traçant la droite m_2v_2, je construis la tangente au point m_2 de la section $r_2o_2s_2$.

3° Je puis considérer la base ABC du cylindre donné comme la section faite par le plan (L_1T_1, v_2) dans le cylindre droit et vertical qui aurait pour base la courbe $r_2o_2s_2$ dans le système des plans de projection qui se coupent suivant la ligne de terre L_2T_2. Alors (fig. 86 et 87) le développement de la surface de ce cylindre, la construction de la transformée PBQP de la section ABC et le tracé de sa tangente s'effectuent comme dans le problème précédent, ainsi que la détermination des points extrêmes de cette courbe et ses points d'inflexion.

PROBLÈME III.

1° *Construire la section faite dans un cône droit et circulaire par un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

2° *Tracer la tangente à la ligne d'intersection.*

3° *Faire le développement de la surface du cône et y rapporter la ligne d'intersection ainsi que sa tangente.*

Soient c, c', les projections du centre de la surface conique donnée, et $A\alpha\beta B$ sa trace horizontale, qui est une circonférence de cercle ayant son centre au point c, puisque le cône est droit et circulaire.

Tout plan qui ne passe pas par le sommet C coupe le cône suivant l'une des trois courbes connues sous le nom de *sections coniques*. Lorsque ce plan rencontre toutes les

positions de la génératrice du cône d'un même côté du sommet, la section est une *ellipse ;* s'il coupe les deux nappes de la surface, la section est une *hyperbole ;* enfin c'est une *parabole* lorsque le plan sécant est parallèle à l'une des positions de la génératrice.

1° *Cas de l'ellipse.*

Soient (fig. 88) PQ, P'Q', les traces du plan sécant, que je suppose perpendiculaire au plan vertical, et tel que sa trace verticale P'Q' rencontre le contour apparent $a'c'b'$ d'une seule nappe du cône sur le plan vertical.

La section se projette verticalement sur la portion $d'e'$ de la trace verticale du plan sécant comprise dans le contour apparent de la nappe CAB. Pour construire sa projection horizontale, je cherche l'intersection du plan sécant et de chacune des positions de la génératrice. Soit, par exemple, la génératrice ($c\mu$, $c'\mu'$). Cette droite perce le plan (PQ, P'Q') en un point M, dont la projection verticale m' est la rencontre des deux lignes P'Q' et $c'\mu'$. La projection horizontale m de ce point est déterminée par l'intersection de $c\mu$ et de la perpendiculaire menée par m' sur la ligne de terre. En appliquant cette construction aux différentes positions de la génératrice, j'obtiendrai la projection horizontale de la section.

Il faut remarquer que cette construction est en défaut pour les deux génératrices Co, Cγ, qui sont situées dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, parce que leurs projections horizontales co, $c\gamma$, se confondent avec la perpendiculaire à LT menée par le point f' d'intersection de leur projection verticale commune $c'f'$ et de la trace P'Q' du plan sécant. Pour lever cette difficulté, je coupe le cône par un plan horizontal $f'g'$. La section qu'il

détermine est circulaire et passe par les points de la surface conique dont la projection verticale est f'; elle a pour rayon la partie $f'g'$ de la trace du plan horizontal comprise entre le point f' et la projection $c'b'$ de la génératrice extrême CB du cône. Par conséquent, la circonférence de cercle décrite du point c comme centre avec un rayon cg, égal à $f'g'$, rencontre les droites $c\gamma$, co, aux points cherchés f et h. Ce procédé peut être appliqué à la recherche de la projection horizontale de tout autre point de la section. Mais, cette ligne étant une ellipse, il est plus simple de construire ses axes comme il suit.

Le plan (AB, C), parallèle au plan vertical, est évidemment un plan de symétrie pour le cône et la section : donc la droite $d'e'$ est la projection verticale et la vraie grandeur du grand axe de la section. J'en détermine la projection horizontale de en menant par les points d' et e' les perpendiculaires à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de la droite AB. Pour avoir le petit axe, qui est perpendiculaire au plan vertical, je tracerai une ligne droite par le point c' et le milieu de $d'e'$: cette droite sera la projection verticale des deux génératrices sur lesquelles se trouvent les extrémités du petit axe. En construisant les projections horizontales des points d'intersection de ces droites et du plan, par l'une des deux méthodes précédentes, j'aurai les sommets de l'ellipse-projection.

Tangente. La tangente en un point quelconque m de l'ellipse dne se détermine, comme pour la section cylindrique, en construisant sa trace horizontale r, qui est l'intersection des traces horizontales du plan sécant et du plan qui touche le cône le long de la génératrice Cμ. Pour avoir la section en vraie grandeur, je prends comme nou-

veau plan horizontal le plan sécant lui-même. Alors la trace verticale P'Q' de ce plan est la nouvelle ligne de terre L_1T_1. Je suppose le plan horizontal rabattu sur la gauche de l'épure, afin de séparer la section $m_1d_1e_1$ de la projection verticale du cône. La construction de cette courbe et de sa tangente se faisant d'après les procédés connus des changements de plan, je n'insisterai pas davantage sur cette partie du problème donné.

Développement. Pour développer la surface du cône, je la considère comme la surface d'une pyramide régulière, c'est-à-dire que je divise la circonférence *c*A de sa base, à partir d'un certain point B, en un nombre assez grand d'arcs égaux pour qu'ils se confondent sensiblement avec leurs cordes, et je construis sur le plan horizontal les triangles isocèles dont ces arcs sont les bases, et qui ont pour côtés égaux des droites égales à l'apothème CB du cône, ou à sa projection verticale $c'b'$.

Cette série de constructions peut être beaucoup abrégée en traçant sur le plan horizontal un cercle BAB dont le rayon soit égal à l'apothème CB du cône, et en portant sur sa circonférence, à partir d'un point quelconque B, des longueurs égales aux divisions de la circonférence *c*A de la base du cône : alors le secteur CBAB représente le développement de la surface conique. Pour y rapporter la ligne d'intersection de cette surface et du plan donné, je prends sur chacun des rayons du secteur aboutissant aux points de division de l'arc BAB une longueur égale à la distance du sommet du cône au point correspondant de la section. Ainsi la droite CM est égale à $c'm'_1$, vraie grandeur de la droite $(cm, c'm')$ qu'on obtient en menant par m' une parallèle à la ligne de terre jusqu'à la rencontre

de la droite $c'b'$. C'est ainsi qu'a été construite la transformée EDME.

La tangente en un point quelconque M de cette courbe rencontre la tangente au cercle CB, menée par l'extrémité du rayon $C\mu$, au même point r qu'avant le développement de la surface du cône. Par conséquent, pour avoir la tangente au point M de la transformée, je porterai la distance μr sur la tangente au cercle CB dans le sens μA, et je tracerai la droite Mr.

2° *Cas de l'hyperbole.*

Soient (fig. 89) PQ, P'Q', les traces du plan donné, qui rencontre les deux nappes du cône CAB, puisque sa trace verticale coupe le contour apparent de ces surfaces sur le plan vertical. La section conique est alors une hyperbole; sa projection horizontale, qui est aussi une hyperbole, se construit par points, et la tangente à cette courbe se détermine d'après les mêmes procédés que si la section était elliptique. Aussi je n'expliquerai que le tracé des asymptotes qui présente une question nouvelle.

Soient f et g les sommets de l'hyperbole: le point o, milieu de la droite fg, est le centre de cette courbe, et par conséquent un point de chacune des asymptotes. Pour construire ces lignes, je puis déterminer leur direction ou un nouveau point de chacune d'elles, par exemple leur trace horizontale. De là deux procédés que je vais exposer successivement :

Direction des asymptotes. Je mène par le sommet du cône le plan $c'd'd$ parallèle au plan donné; il coupe la surface conique suivant deux positions Cd, $C\delta$, de la génératrice, lesquelles sont respectivement parallèles aux asymptotes de l'hyperbole déterminée par le plan (PQ,

P'Q'), puisque deux plans parallèles font, dans le cône, des sections semblables : donc les projections horizontales de ces asymptotes, c'est-à-dire les asymptotes de l'hyperbole-projection, sont parallèles aux droites *cd*, *cδ*.

Traces horizontales des asymptotes. Chacune des asymptotes peut être considérée comme une tangente dont le point de contact est situé à l'infini. Par conséquent, les génératrices du cône qui passent par les points de contact des asymptotes sont parallèles au plan sécant (PP, Q'Q'), et les asymptotes sont les intersections de ce plan par les plans tangents au cône, le long de ces génératrices qui sont les droites C*d*, C*δ*. Or les traces horizontales *de*, *δε*, de ces plans tangents, rencontrent la trace PQ du plan donné aux points *e* et *ε* : donc ces points sont les traces horizontales des asymptotes, qui se projettent horizontalement suivant les droites *oe*, *oε*.

La détermination de la vraie grandeur de la section conique se fait, comme dans le cas de l'ellipse, par un changement de plan. Dans l'épure ci-jointe j'ai pris le plan même de la section pour nouveau plan horizontal de projection.

Quant au développement de la surface du cône, je l'effectue comme dans l'épure précédente, ainsi que la construction de la transformée de la section. Il faut remarquer 1° que les asymptotes restent toujours parallèles aux génératrices C*d*, C*e*; 2° que la droite *de*, qui mesure la distance invariable des traces horizontales de la génératrice C*d* et de l'asymptote parallèle O*e*, devient tangente au développement de la base du cône. De là résulte cette construction des asymptotes : par l'extrémité de chaque rayon C*d* parallèle à une asymptote je trace la tangente

au cercle BAB ; je prends ensuite sur cette droite, dans le sens indiqué par le développement de la surface, une longueur égale à *de*, et je mène par le point *e* la parallèle au rayon C*d*.

3° *Cas de la parabole.*

Le plan sécant est alors parallèle à l'une des deux génératrices CA, CB, du cône. L'épure n'offrant rien de particulier, je propose ce cas comme exercice.

Scholie. — En prenant pour pôle le centre C du secteur circulaire et pour axe polaire la droite CA, on trouve

$$\rho = \frac{d}{1 - 2\,\frac{\cos(\alpha+\beta)\sin\beta}{\sin\alpha}\,\sin^2\left(\frac{\omega}{2\sin\beta}\right)}$$

pour l'équation de la transformée EDME (fig. 88) : *d* représente la distance CD, α l'angle $c'd'e'$, et β l'angle $a'c'f'$ du cône. Cette équation polaire donne les transformées des trois sections coniques, lorsqu'on y fait varier α entre les limites 0° et 2π.

PROBLEME IV.

Intersection d'une surface réglée et d'une ligne droite.

Je construis d'abord les projections de la section faite dans la surface par l'un des plans projetant la droite donnée, et je détermine ensuite les points d'intersection de cette courbe et de la droite.

Car ces points sont ceux dans lesquels cette droite rencontre la surface donnée.

Scholie. — Dans certains cas particuliers, cette construction peut être simplifiée par un choix convenable du plan auxiliaire que l'on conduit par la droite donnée.

Ainsi, lorsque la surface est cylindrique, il faut mener par la droite un plan parallèle aux génératrices du cylindre : il rencontrera la surface suivant deux droites qui contiendront les points cherchés. — De même, si la surface donnée est celle d'un cône, on la coupera par un plan passant par la droite et le sommet du cône.

M. Dandelin a donné (1) la solution suivante pour le cas d'un hyperboloïde déterminé par trois directrices rectilignes :

« Concevons, dit-il, par une des trois directrices don-
» nées, un plan parallèle à la droite donnée; ce plan cou-
» pera la surface suivant deux droites, que nous appelle-
» rons A et A', et dont l'une sera la directrice elle-même.
» A présent, menons par la droite donnée un plan paral-
» lèle aux droites A et A', il coupera la surface suivant
» une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à A
» et A', puisque les sections faites dans une surface du
» second ordre par des plans parallèles sont semblables.
» Il sera facile de trouver trois points de cette hyperbole,
» c'est-à-dire trois points d'intersection de son plan et de
» la surface gauche; et alors le problème sera résolu,
» puisqu'il n'y aura plus qu'à construire l'intersection de
» cette hyperbole et de la droite donnée, et qu'on aura
» tous les éléments nécessaires, savoir : trois points de
» la courbe et la direction de ses asymptotes. »

La résolution de ce dernier problème, auquel M. Dandelin ramène l'intersection d'un hyperboloïde à une nappe et d'une ligne droite, dépend de cette propriété de l'hyperbole : si, par les extrémités d'une corde quelcon-

(1) Correspondance de l'Ecole Polytechnique, t. III.

que de cette courbe, on trace des parallèles à ses asymptotes, la seconde diagonale du parallélogramme ainsi formé est un diamètre de l'hyperbole. On déterminera par ce théorème le centre, les asymptotes et les axes de l'hyperbole dont on connaît trois points et la direction des asymptotes, puis on construira facilement les points d'intersection de cette ligne et de la droite donnée.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

1. Construire la section faite par un plan dans un cylindre parallèle au plan vertical dont la directrice est une ellipse à projections droite et circulaire.

2. Construire la section faite par un plan dans un cône dont la directrice est une ellipse à projections droite et circulaire, et dont le sommet se trouve sur une parallèle au plan vertical menée par le centre de l'ellipse.

3. Construire les points d'intersection d'une ligne droite quelconque et du cylindre ou du cône donné dans les deux problèmes précédents.

4. Construire la section faite par un plan vertical dans un paraboloïde hyperbolique donné par son plan directeur et deux directrices rectilignes.

5. Construire la section faite par un plan vertical dans un hyperboloïde à une nappe dont on connaît trois directrices rectilignes. On prendra l'une de ces droites dans le plan vertical, la seconde dans le plan horizontal, et la troisième, perpendiculaire à ce plan.

CHAPITRE II.

Sections planes des surfaces de révolution.

PROBLÈME I.

Construire la section faite dans une surface de révolution dont l'axe est vertical par un plan (AB, A'B') *perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

Je coupe le plan donné et la surface de révolution par un plan horizontal quelconque. Les deux lignes d'intersection sont une horizontale du plan (AB, A'B') et un parallèle de la surface de révolution. Or les points de rencontre de ces deux lignes sont communs aux trois surfaces : donc ils font partie du contour de la section faite dans la surface de révolution par le plan (AB, A'B'). Les projections horizontales de ces points sont immédiatement données par les intersections des projections horizontales du parallèle et de l'horizontale correspondante ; quant à leurs projections verticales, elles se trouvent sur la trace du plan auxiliaire. En faisant varier la position de ce plan, je construirai par points les projections de la section cherchée, dont je déterminerai la vraie grandeur par un changement de plan, comme je l'ai fait pour les sections cylindrique et conique.

que de cette courbe, on trace des parallèles à ses asymptotes, la seconde diagonale du parallélogramme ainsi formé est un diamètre de l'hyperbole. On déterminera par ce théorème le centre, les asymptotes et les axes de l'hyperbole dont on connaît trois points et la direction des asymptotes, puis on construira facilement les points d'intersection de cette ligne et de la droite donnée.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

1. Construire la section faite par un plan dans un cylindre parallèle au plan vertical dont la directrice est une ellipse à projections droite et circulaire.

2. Construire la section faite par un plan dans un cône dont la directrice est une ellipse à projections droite et circulaire, et dont le sommet se trouve sur une parallèle au plan vertical menée par le centre de l'ellipse.

3. Construire les points d'intersection d'une ligne droite quelconque et du cylindre ou du cône donné dans les deux problèmes précédents.

4. Construire la section faite par un plan vertical dans un paraboloïde hyperbolique donné par son plan directeur et deux directrices rectilignes.

5. Construire la section faite par un plan vertical dans un hyperboloïde à une nappe dont on connaît trois directrices rectilignes. On prendra l'une de ces droites dans le plan vertical, la seconde dans le plan horizontal, et la troisième, perpendiculaire à ce plan.

CHAPITRE II.

Sections planes des surfaces de révolution.

PROBLÈME I.

Construire la section faite dans une surface de révolution dont l'axe est vertical par un plan (AB, A′B′) *perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

Je coupe le plan donné et la surface de révolution par un plan horizontal quelconque. Les deux lignes d'intersection sont une horizontale du plan (AB, A′B′) et un parallèle de la surface de révolution. Or les points de rencontre de ces deux lignes sont communs aux trois surfaces : donc ils font partie du contour de la section faite dans la surface de révolution par le plan (AB, A′B′). Les projections horizontales de ces points sont immédiatement données par les intersections des projections horizontales du parallèle et de l'horizontale correspondante ; quant à leurs projections verticales, elles se trouvent sur la trace du plan auxiliaire. En faisant varier la position de ce plan, je construirai par points les projections de la section cherchée, dont je déterminerai la vraie grandeur par un changement de plan, comme je l'ai fait pour les sections cylindrique et conique.

La tangente en un point quelconque de cette courbe s'obtient en construisant l'intersection du plan donné et du plan tangent en ce point de la surface de révolution.

Scholie. — Lorsque la surface de révolution sera une surface du second ordre, la section cherchée sera une ellipse, ou une hyperbole, ou bien une parabole, dont il faudra chercher les éléments principaux, au lieu de la construire par points.

PROBLÈME II.

Construire la section faite dans la surface gauche de révolution par un plan perpendiculaire au plan vertical de projection.

Soient (fig. 90) ab, $a'b'$, et cd, $c'd'$, les projections de deux lignes droites, dont l'une CD est parallèle au plan vertical, et l'autre AB perpendiculaire au plan horizontal. La droite CD, en tournant autour de AB, engendre une sarface gauche de révolution, que je coupe par le plan (PQ, P'Q') perpendiculaire au plan vertical. La section peut être une ellipse, ou une hyperbole, ou bien une parabole, puisqu'elle est semblable à celle que le même plan fait dans le cône asymptote à la surface gauche de révolution.

1° *Cas de l'ellipse.*

Je mène par le centre (a, a') de la surface gauche la parallèle ($a\gamma$, $a'c'$) à la droite (cd, $c'd'$); cette ligne est l'une des génératrices du cône asymptote, dont le contour apparent sur le plan vertical se compose des deux droites $a'c'$, $a'\delta'$. Or le plan donné ne rencontre qu'une

seule nappe de ce cône : donc la section qu'il fait dans la surface de révolution est une ellipse.

Cette courbe se projette verticalement sur la trace $P'Q'$ du plan sécant; mais elle a pour projection horizontale une ellipse, que l'on peut construire par points en suivant la méthode exposée dans le problème précédent. En effet, soit m' la projection verticale d'un point de la section. Pour construire sa projection horizontale, je mène par le point m' le plan horizontal $m'g'$, qui coupe la surface gauche suivant un parallèle et la génératrice $(cd, c'd')$ en un point (g, g') situé sur la circonférence de ce cercle. J'en conclus que la droite ag est égale au rayon de ce parallèle, qui se projette horizontalement sur le cercle décrit du point a comme centre avec le rayon ag. Le plan auxiliaire $m'g'$ rencontre le plan $(PQ, P'Q')$ suivant la perpendiculaire au plan vertical menée par le point m' : donc les points d'intersection m et n de la circonférence ag et de la perpendiculaire $m'm$ à la ligne de terre sont les projections horizontales de deux points M et N de la section, qui ont la même projection verticale m'. J'obtiendrais par des constructions analogues aux précédentes les projections horizontales des autres points de cette courbe. Il reste à déterminer ses axes, et, par suite, ses sommets; je vais indiquer deux méthodes :

1° Le plan $a\gamma$ conduit par l'axe AB parallèlement au plan vertical coupe le plan $(PQ, P'Q')$ suivant le grand axe de la section, et la surface gauche suivant une hyperbole qui a pour axe transverse le diamètre du cercle de gorge parallèle au plan vertical, et pour asymptotes les lignes d'intersection du plan $a\gamma$ et du cône asymptote à la surface gauche. Par conséquent, le grand axe de la

se projette sur ce plan au milieu o' de la projection verticale $e'f'$ de l'axe de la section que le plan (PQ, P'Q') détermine dans le cône asymptote, car les deux sections sont concentriques. Donc on aura les projections horizontales des sommets de l'hyperbole en construisant celles des points de la surface gauche qui se projettent verticalement au point o'. Cette construction est la même que celle des extrémités du petit axe de la section elliptique.

Quant aux asymptotes de la section, elles sont les mêmes que celles de la courbe d'intersection du cône asymptote et du plan sécant. On obtiendra donc leurs projections d'après l'un des deux procédés exposés dans le problème VII du chapitre précédent.

3° *Cas de la parabole.*

Si le plan (PQ, P'Q') est parallèle à l'une des génératrices extrêmes du cône asymptote, la section est une parabole, dont la construction n'offre rien de particulier. Le sommet de cette courbe se détermine d'après l'une des méthodes précédentes.

Scholie général. — Si le plan donné (PQ, P'Q') était perpendiculaire au plan horizontal, il couperait la surface gauche de révolution suivant une hyperbole semblable au méridien principal. La détermination des axes et des asymptotes de cette courbe n'offre aucune difficulté.

PROBLÈME III.

Intersection d'une surface de révolution et d'une ligne droite.

Construisez la ligne d'intersection de la surface et du plan projetant verticalement la droite; puis déterminez

les points où cette droite rencontre la section plane de la surface de révolution.

Scholie. — Si la surface de révolution est du second ordre, la section faite dans cette surface par le plan qui projette verticalement la droite donnée est semblable au méridien principal. On construira les principaux éléments de sa projection verticale, qui est aussi une courbe du second ordre; on déterminera ensuite les points d'intersection de la droite donnée et de la section faite dans la surface de révolution.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

1. Construire la section faite par un plan dans un paraboloïde de révolution.

2. Construire la section faite par un plan dans un hyperboloïde à deux nappes et de révolution.

3. Déterminer les intersections d'un paraboloïde de révolution et d'une ligne droite.

4. Déterminer les intersections d'une ligne droite et d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes.

5. Construire la section faite par un plan dans une sphère.

6. Déterminer les points d'intersection d'une sphère et d'une ligne droite.

CHAPITRE III.

Intersection de deux surfaces réglées.

Pour construire les projections de l'intersection de deux surfaces réglées, on cherche successivement les projections des points dans lesquels chaque génératrice de l'une des surfaces rencontre l'autre surface donnée. Les projections horizontales de ces points forment la projection horizontale de l'intersection des deux surfaces; leurs projections verticales déterminent aussi la projection verticale de cette ligne.

Nous avons vu que, pour construire les points de rencontre d'une surface et d'une ligne droite, on mène par la droite un plan qui fait dans la surface une section passant par les points cherchés. Ce plan devra être choisi de telle sorte que la construction de la section de la surface soit simple et facile. S'il existe une direction du plan auxiliaire pour laquelle cette section soit une ligne droite, il faudra la prendre de préférence, parce que le problème sera ramené à la détermination du point d'intersection de deux droites. Les problèmes suivants en offrent deux exemples remarquables.

PROBLÈME I.

Construire l'intersection de deux cylindres et les tangentes à cette courbe.

Soient ABC et NOP les traces horizontales des deux cylindres, dont l'un a pour génératrice la droite (Rα, $r'\alpha'$), et l'autre la droite (Gγ, $g'\gamma'$). Pour construire les projections de leur intersection, je considère une série de plans parallèles aux deux génératrices. Chacun de ces plans coupe les deux surfaces suivant des lignes droites, et les deux sections faites dans le premier cylindre rencontrent les deux sections faites dans le second, en des points qui appartiennent à la ligne d'intersection de ces surfaces.

Pour déterminer la direction constante des traces horizontales des plans sécants, je mène, par un point quelconque (u, u') de l'espace, un plan parallèle aux deux génératrices. Toute droite MR parallèle à la trace horizontale de ce plan peut être regardée comme la trace horizontale de l'un des plans cherchés; or cette ligne coupe la base du premier cylindre aux points H et M, la base du second aux points R et O : donc ces points sont les traces horizontales des génératrices, par lesquelles le plan MR traverse les deux surfaces cylindriques. En construisant les projections de ces droites, je détermine les projections de leurs points de rencontre (α, α'), (ε, ε'), (π, π'), (ρ, ρ'), qui appartiennent à la ligne d'intersection des deux cylindres. Si j'opère de même pour différentes parallèles à la droite vx, j'obtiendrai les projections des points correspondants de cette intersection.

Parmi les parallèles à la droite vx, il faut remarquer celles qui sont tangentes à chacune des courbes ABC, NOP, parce qu'elles déterminent des plans tangents à la surface correspondante. C'est ainsi que, dans l'épure 91, les droites FG et AN, simultanément parallèles à vx et tangentes à la courbe NOP, sont les traces de deux plans tangents au cylindre NOP. Comme ces plans coupent l'autre cylindre, il est visible que le premier pénètre dans le second par la portion BCE de sa surface, et qu'il en sort par la portion opposée AKF. Donc, lorsque les tangentes à l'une des bases, menées parallèlement à la droite vx, rencontrent l'autre base, il y a *pénétration totale* et l'intersection des deux surfaces se compose de deux courbes séparées. Au contraire, si la tangente NB, seule, rencontrait la courbe ABC, la pénétration serait *partielle* et l'intersection des deux surfaces ne serait formée que d'une seule courbe.

Pour tracer avec plus d'exactitude les projections de l'intersection des deux cylindres, je vais indiquer comment on peut mener des tangentes à ces courbes et construire leurs points remarquables.

Tangente. Soient γ, γ', les projections des points de rencontre des deux génératrices qui ont pour traces horizontales les points G et P. Pour avoir les projections de la tangente au point (γ, γ') de l'intersection des deux surfaces, je construis la trace horizontale Gy du plan tangent en ce point au cylindre ABC, et la trace horizontale Py du plan tangent en ce même point au cylindre NOP. La droite qui joint le point (γ, γ') au point de rencontre y de ces traces est la tangente cherchée : donc elle a pour projections les droites γy et $\gamma' y'$, dont l'une est tangente à

la projection verticale et l'autre à la projection horizontale de l'intersection des cylindres.

Points-limites. Dans la série des plans auxiliaires, il faut distinguer ceux qui coupent l'un des cylindres et sont tangents à l'autre, car ils déterminent les points extrêmes de l'intersection des deux surfaces cylindriques, puisque tout plan auxiliaire non compris entre ces plans tangents ne rencontre pas l'un des cylindres. Je donnerai le nom de *points-limites* à ces points remarquables des courbes d'entrée et de sortie.

Pour construire les projections de ces points, je mène, parallèlement à vx, la tangente NA à la base du cylindre NOP ; cette ligne est la trace horizontale d'un plan qui touche ce cylindre le long de la génératrice N et coupe l'autre cylindre suivant les deux génératrices A, B. Je détermine les projections de ces trois droites, et j'en déduis celles de leurs points de rencontre (μ, μ'), (δ, δ'), qui sont deux points-limites de l'intersection des cylindres. Il est évident que la génératrice A est l'intersection des plans qui touchent les deux cylindres au point (δ, δ'), et, par conséquent, qu'elle est tangente, en ce point, à la courbe de sortie : donc ses projections sont tangentes à celles de cette courbe. De même la génératrice B est tangente au point (μ, μ') de la courbe d'entrée.

En traçant la seconde tangente QE à la base du cylindre NOP, parallèle à vx, j'aurai deux autres points-limites (β, β') et (γ, γ') de l'intersection cherchée. Les tangentes en ces points sont aussi les génératrices correspondantes du cylindre ABC.

Points situés sur les contours apparents des cylindres. Je cherche les points où chacune des génératrices qui for-

ment le contour apparent de l'un des cylindres par rapport à l'un des plans de projection rencontre l'autre cylindre. Ces points, qui sont, au plus, au nombre de huit pour chacun des plans de projection, ont évidemment pour tangentes les génératrices du contour apparent dont ils font partie.

Scholie.—Les points visibles de l'intersection des deux cylindres sont déterminés par les rencontres des génératrices visibles de ces cylindres.

PROBLÈME II.

Construire l'intersection de deux cônes et la tangente en un point quelconque de cette courbe.

Soient (fig. 93) a, a', les projections du sommet de l'un des cônes; bcd sa trace horizontale; α, α', les projections du sommet de l'autre cône; et $6\gamma\delta$ sa trace horizontale. Je construis les projections $a\alpha$, $a'\alpha'$, et la trace horizontale f de la droite qui joint les sommets des deux surfaces coniques, et je mène par cette ligne une série de plans qui coupent ces surfaces suivant plusieurs de leurs génératrices: les points de rencontre de ces droites, situées dans le même plan, appartiennent évidemment à l'intersection des deux cônes.

Pour construire les projections de cette courbe, je tire par le point f une droite quelconque fd qui rencontre les bases des deux cônes, et je la considère comme la trace horizontale de l'un des plans auxiliaires. Ce plan coupe le cône (a, a') suivant les droites Ad, Ah, et le cône (α, α') suivant les droites A6, Aε. Or la génératrice Ad rencontre les génératrices A6, Aε, aux points (m, m') et (μ, μ'):

donc ces points font partie de l'intersection des deux cônes. Il faut remarquer que la génératrice A*h* du premier cône ne rencontre pas le second. En répétant cette construction pour chacune des droites qui, passant par le point *f*, coupent les bases des deux cônes, j'obtiendrai les projections des différents points de la courbe cherchée.

Je vais indiquer maintenant le tracé de la tangente en un point quelconque de cette ligne et la détermination de quelques points remarquables.

Tangente. La tangente au point (m, m') de l'intersection des deux cônes est la droite par laquelle se coupent les plans tangents à chacun des cônes et passant par ce point : donc elle a pour trace horizontale le point de rencontre n des traces horizontales dn, θn de ces plans, et pour projections les droites mn, $m'n'$.

Points-limites. Je mène par le point f les tangentes $f\gamma$, $f\delta$, à la base du cône (α, α'); tout plan auxiliaire, conduit par la droite (ax, $a'\alpha'$) hors de l'angle dièdre $\gamma f A \delta$ ne rencontre pas les deux cônes, et, par conséquent, ne donne aucun point de leur intersection. Donc les points-limites de cette courbe sont déterminés par les plans $f\gamma$, $f\delta$, tangents au cône (α, α'), et rencontrant l'autre cône (a, a').

Je construirai ces points (p, p') et (q, q') par la méthode ordinaire, ainsi que leurs tangentes, qui sont les deux génératrices Ae, Ag, du cône (a, a'), sur lesquelles ils se trouvent.

Points situés sur les contours apparents des deux cônes. Ces points sont ceux dans lesquels chacune des génératrices qui forment le contour apparent de l'un des cônes rencontre l'autre cône. Leur construction, ainsi que celle

de leurs tangentes, n'offrant aucune difficulté, je ne m'y arrêterai pas.

Scholie. — Lorsque les tangentes $f\gamma$, $f\delta$, menées à l'une des bases, rencontrent l'autre, comme dans l'épure 93, il y a pénétration totale de l'une des surfaces coniques dans l'autre ; en effet l'intersection de ces surfaces se compose de deux courbes, dont l'une se trouve sur la nappe inférieure de la surface (a, a'), entre les deux génératrices Ae, Ag, et l'autre sur la nappe supérieure, entre les deux génératrices Ah, Ak,

Au contraire, si une seule des tangentes $f\gamma$, $f\delta$, rencontrait la base du cône (a, a'), l'intersection des deux cônes ne serait formée que d'une courbe, et la pénétration ne serait que partielle.

Dans les deux cas, cette ligne peut avoir une ou plusieurs branches infinies, si les deux cônes ont des génératrices parallèles. Pour le reconnaître, je construis sur le plan horizontal une courbe $6_1\gamma_1\delta_1$ semblable à la base $6\gamma\delta$ du cône (α, α') et semblablement placée, en prenant pour centre de similitude la trace horizontale f de la droite ($a\alpha$, $a'\alpha'$), et pour rapport de similitude le rapport des distances du point f au sommet des deux cônes ; et je dis que la ligne d'intersection de ces cônes a autant de branches infinies que les courbes $6_1\gamma_1\delta_1$, bcd, ont de points communs. En effet, les droites menées des points (a, a') et (α, α') à deux points homologues des courbes semblables $6\gamma\delta$, $6_1\gamma_1\delta_1$, étant parallèles, si je conçois un cône ayant la ligne $6_1\gamma_1\delta_1$ pour directrice et le point (a, a') pour sommet, ses génératrices et celles du cône $6\gamma\delta$ seront parallèles deux à deux. Par conséquent les deux surfaces coniques bcd, $6\gamma\delta$,

auront autant de couples de génératrices parallèles, c'est-à-dire autant de branches infinies que les deux cônes *bcd*, $\mathfrak{b}_1\gamma_1\delta_1$, auront de génératrices communes, ou leurs bases, de points communs.

Les plans, tangents aux deux cônes et conduits par deux génératrices parallèles, se coupent ou sont parallèles. Dans le premier cas, leur intersection est l'asymptote de la branche infinie correspondante ; dans le second cas cette branche n'a pas d'asymptote.

PROBLÈME III.

Construire les points d'intersection d'une surface réglée et d'une ligne courbe quelconque.

Construisez l'intersection de la surface réglée et de l'un des cylindres projetant la courbe donnée. Les points de rencontre de ces deux lignes seront les points cherchés.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

1. Construire l'intersection d'un cône et d'une surface gauche.
2. Construire l'intersection d'un cylindre et d'une surface gauche.
3. Construire l'intersection de deux hyperboloïdes à une nappe, déterminés par trois directrices rectilignes.
4. Construire les points d'intersection d'une ellipse à projections droite et circulaire et d'un cône quelconque.
5. Construire les points d'intersection d'une parabole située dans un plan horizontal et d'un cylindre oblique.

CHAPITRE IV.

Intersection de deux surfaces de révolution.

PROBLÈME I.

Construire l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont dans le même plan, et la tangente à cette courbe.

Les axes des deux surfaces se rencontrent ou sont parallèles, puisqu'ils sont situés dans le même plan. Je vais examiner successivement ces deux cas. Pour simplifier les constructions, je prendrai le plan horizontal de projection perpendiculaire à l'un des axes et le plan vertical parallèle à ces deux droites.

1° *Axes concourants.* — Soient (fig. 94) ab, $a'b'$, les projections de l'axe vertical, et $c'p'd'$ la projection verticale du méridien principal de la surface correspondante. Soient aussi ae, parallèle à LT, la projection horizontale de l'axe de l'autre surface, $a'e'$ sa projection verticale, et $f'p'g'$ celle de son méridien principal. Du point de rencontre a' des droites $a'b'$, $a'e'$, comme centre, je décris une circonférence de cercle avec un rayon quelconque $a'h'$, et je considère cette courbe comme la projection verticale d'une sphère qui aurait son centre au point d'intersection (a,a') des deux axes. Cette sphère coupe la surface $c'p'd'$ sui—

vant un parallèle, puisqu'elles sont de révolution autour du même axe $(ab, a'b')$, et ce parallèle se projette verticalement sur la corde $h'k'$ qui joint les points communs aux projections verticales $c'p'd'$, $h'n'k'$, des méridiens principaux des deux surfaces.

De même, la sphère (a,a') coupe l'autre surface de révolution $f'p'g'$ suivant un parallèle dont la projection verticale est la corde $n'o'$, commune aux projections verticales $f'p'g'$, $h'n'k'$, des méridiens principaux des deux surfaces. Si le point de rencontre m' des droites $h'k'$ et $n'o'$ est situé sur ces lignes et non sur leurs prolongements, les circonférences des deux parallèles ont deux points communs, qui se projettent verticalement au point m' et dont les projections horizontales m et μ se trouvent sur la projection horizontale du parallèle $h'k'$. Donc les deux points (m, m') et (μ, m') appartiennent à l'intersection des deux surfaces de révolution.

Cette courbe a un plan de symétrie, qui n'est autre que le plan des axes : par conséquent, sa projection verticale est terminée aux deux points p', q', où se rencontrent les projections verticales $c'p'd'$, $f'p'g'$, des méridiens principaux ; et sa projection horizontale a pour axe la droite $a'e'$. Je conclus de là qu'en faisant varier le rayon $a'k'$ de la sphère auxiliaire entre les limites $a'p'$, $a'q'$, j'obtiendrai les projections des différents points de la courbe cherchée.

Tangente.—Pour tracer la tangente au point (m, m') de cette courbe, je pourrais construire les plans tangents en ce point à chacune des surfaces de révolution, et déterminer ensuite l'intersection de ces plans ; mais la méthode de M. Binet est plus simple. Pour l'appliquer, je construis les projections verticales $m's'$, $m'u'$, des normales

menées par le point (m, m') aux deux surfaces de révolution, ainsi que leurs projections horizontales ma, mu, et je mène par ce point M la perpendiculaire (mt, $m't'$) au plan des deux normales.

On peut éviter la construction des traces de ce plan, en remarquant 1° qu'il rencontre les axes AB, AE, aux points S, U, et que sa trace verticale est parallèle à la droite SU ou à la projection verticale $s'u'$ de cette droite ; 2° que sa trace horizontale est parallèle à son intersection (vx, $v'x'$) avec le plan du parallèle maximum $c'd'$ de la surface de révolution $c'p'd'$, ou à la projection horizontale vx de cette ligne. De là résulte cette règle pratique : Pour construire la projection verticale de la tangente au point M, on trace, par la projection verticale m' de ce point, la perpendiculaire $m't'$ à la droite $s'u'$ qui joint les projections verticales des points où chacune des normales MS, MU, rencontre l'axe de la surface correspondante. — La projection horizontale de cette même tangente s'obtient en déterminant les projections horizontales v et x des points d'intersection des deux normales et du plan $c'd'$ du parallèle maximum, et traçant, par le point m, la perpendiculaire mt à la droite vx.

Cette construction de la tangente, au moyen des normales, est encore applicable aux points extrêmes p' et q' de la projection verticale de la courbe cherchée, tandis que la méthode des plans tangents est insuffisante : car l'intersection de ces plans, qui sont alors perpendiculaires au plan vertical, n'a pour projection verticale qu'un seul point.

2° *Axes parallèles.* — Je coupe les deux surfaces de révolution par une série de plans horizontaux. Les inter-

sections de ces surfaces par chacun de ces plans sont deux parallèles, dont les points de rencontre appartiennent à la courbe cherchée. La construction des projections de cette courbe et de ses tangentes n'offrant rien de particulier, je ne la développerai pas davantage.

PROBLÈME II.

Construire l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes ne sont pas dans le même plan, et la tangente à cette courbe.

Je suppose, comme dans le problème précédent, le plan horizontal de projection perpendiculaire à l'axe de l'une des surfaces et le plan vertical parallèle aux deux axes; puis, je coupe les surfaces données par des plans horizontaux. Chacun de ces plans rencontre suivant un parallèle la surface de révolution dont l'axe est vertical, et l'autre surface suivant une courbe qui n'est pas un cercle. Or, les points communs à cette courbe et au parallèle appartiennent à l'intersection des deux surfaces de révolution : donc, pour avoir les projections de cette ligne, je construirai les projections des deux sections faites par chaque plan horizontal, et je déterminerai les points de rencontre de ces lignes.

Scholie. — La construction de la projection horizontale de la section, faite par chacun des plans horizontaux dans la surface dont l'axe n'est pas vertical, complique beaucoup la solution de ce problème. Mais on peut l'éviter dans la plupart des cas, lorsque la surface donnée est du second ordre. C'est ce que je vais expliquer dans le problème suivant.

PROBLÈME III.

Construire l'intersection de deux ellipsoïdes allongés et de révolution, leurs axes n'étant pas situés dans le même plan.

L'un des ellipsoïdes (fig. 95) a pour axe la verticale (ab, $a'b'$) et pour projection verticale de son méridien principal l'ellipse $a'b'c'$; l'autre ellipsoïde a son axe (de, $d'e'$) parallèle au plan vertical, et se projette sur ce plan par l'ellipse $e'f'g'$.

Cela posé, je remarque qu'il existe (1) deux directions dans lesquelles ces ellipsoïdes peuvent être coupés suivant des courbes semblables par un même plan perpendiculaire au plan vertical. Pour trouver ces directions, je construis une ellipse $e'h'i'$, concentrique à l'ellipse $e'f'g'$, et homothétique à l'autre ellipse $a'b'c'$, avec cette condition que son axe minimum $e'h'$ soit égal à l'axe minimum $e'f'$ de la ligne $e'f'g'$. Les deux courbes, concentriques, se coupent en quatre points, qui sont, deux à deux, diamétralement opposés. Soit $n'o'$ l'un de leurs diamètres communs : je dis que les sections faites, dans les deux ellipsoïdes donnés, par un plan perpendiculaire au plan vertical et parallèle à la droite $n'o'$, sont semblables. En effet, si je considère l'ellipse $e'h'i'$ comme la projection verticale du méridien principal d'un ellipsoïde de révolution concentrique à l'ellipsoïde $e'f'g'$, le plan mené par la droite $n'o'$ perpendiculairement au plan vertical coupe ces deux ellipsoïdes suivant la même ellipse, qui a pour

(1) Voir la note qui termine ce traité.

grand axe la droite $n'o'$ et pour petit axe le diamètre commun à leurs parallèles maxima. Or les deux ellipsoïdes $e'h'i'$, $a'b'c'$, sont semblables, puisqu'ils sont engendrés par des ellipses semblables tournant autour de leurs grands axes : donc le plan $n'o'$ détermine des sections semblables dans les trois surfaces. Par conséquent il en est de même de tous les plans qui lui sont parallèles.

Les sections elliptiques déterminées par ces plans se projettent généralement suivant des ellipses sur le plan horizontal. Pour éviter la construction de ces ellipses, je change de plan horizontal et je prends le nouveau, de telle sorte que ces courbes s'y projettent circulairement. Pour cela, je décris une demi-circonférence de cercle sur la droite $n'o'$, et je prends, à partir du point o', une corde $o'k'$ égale au double de $e'f'$, c'est-à-dire égale au petit axe de l'ellipse $n'o'$ commune aux deux ellipsoïdes concentriques, et je trace la nouvelle ligne de terre L_1T_1 parallèle à la droite $o'k'$. Les deux axes de l'ellipse $n'o'$ ayant des projections égales sur le nouveau plan horizontal, toutes les sections parallèles à cette courbe se projetteront sur le même plan suivant des cercles.

Soient a_1 et e_1 les nouvelles traces horizontales des deux axes AB, DE : je mène, par ces points, des parallèles à L_1T_1. Ces droites représentent les nouvelles projections horizontales des méridiens principaux des deux surfaces données. Pour construire un point de l'intersection de ces surfaces, je les coupe par un plan perpendiculaire au plan vertical dont la trace verticale $p's'$ soit parallèle à $n'o'$. Les sections sont deux ellipses semblables dont les grands axes sont égaux aux cordes $p'q'$, $r's'$, interceptées sur $p's'$ par les projections verticales des méridiens principaux des deux

surfaces. Ces ellipses se projettent sur le nouveau plan horizontal par les cercles p_1q_1 et r_1s_1, qui se coupent aux points m_1 et μ_1, projections horizontales des points d'intersection des deux ellipses. Je détermine ensuite les projections verticales m' et μ' de ces points, puis leurs projections m et μ sur le plan horizontal primitif.

En répétant cette construction, je déterminerai les projections des différents points de la courbe cherchée. Les tangentes à cette courbe s'obtiennent par les procédés précédemment indiqués.

Scholie. — Cette méthode est aussi applicable à deux ellipsoïdes aplatis; mais elle ne convient pas à deux ellipsoïdes dont l'un serait allongé et l'autre aplati, parce qu'ils ne peuvent être coupés suivant des courbes semblables par un plan perpendiculaire à tout plan parallèle à leurs axes.

On peut construire par le même procédé l'intersection d'un ellipsoïde allongé et d'un hyperboloïde à une nappe, ou d'un ellipsoïde aplati et d'un hyperboloïde à deux nappes.

Enfin cette méthode peut être employée aussi pour déterminer l'intersection d'un paraboloïde et d'un ellipsoïde aplati ou d'un hyperboloïde à deux nappes. Si l'on a le soin de prendre pour plan horizontal un plan perpendiculaire à l'axe de révolution du paraboloïde, les sections elliptiques et semblables s'y projetteront immédiatement suivant des cercles.

C'est M. Chapuy qui a donné le principe de cette solution (tome II de la *Correspondance de l'école polytechnique*); M. Lefébure de Fourcy en a simplifié l'application dans son Traité de géométrie descriptive.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

1° Construire l'intersection d'une sphère et d'un cône.

2° Construire l'intersection d'une sphère et d'un cylindre.

3° Construire l'intersection d'une sphère et d'une surface gauche de révolution.

4° Construire l'intersection d'une sphère et d'un paraboloïde.

NOTE

SUR LES SECTIONS PLANES ET SEMBLABLES DES SURFACES DU SECOND ORDRE ET DE RÉVOLUTION.

THÉORÈME I.

Si deux ellipsoïdes de révolution sont l'un et l'autre allongés ou aplatis, il existe deux directions dans lesquelles un plan, perpendiculaire à tout plan parallèle aux axes de ces surfaces, les coupe suivant des courbes semblables.

En effet, soient

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

et

$$\frac{(x\cos\theta-z\sin\theta)^2+y^2}{\alpha^2}+\frac{(x\sin\theta+z\cos\theta)^2}{\beta^2}=1$$

les équations de deux ellipsoïdes concentriques, dont le premier est de révolution autour de l'axe des z, et le second autour de la droite déterminée par les équations

$$y=0,\qquad z+x\cot\theta=0.$$

Je coupe ces ellipsoïdes par le plan

$$z=mx$$

perpendiculaire au plan de leurs axes de rotation. Les sections qu'il y détermine se projettent sur le plan xy

suivant des courbes qui ont pour équations

$$\left(\frac{a^2m^2+b^2}{a^2b^2}\right)x^2+\frac{y^2}{a^2}=1$$

et

$$\frac{\beta^2(\cos\theta-m\sin\theta)^2+\alpha^2(\sin\theta+m\cos\theta)^2}{\alpha^2\beta^2}x^2+\frac{y^2}{\alpha^2}=1.$$

Lorsque les coefficients de x^2 et y^2 seront proportionnels, les sections seront évidemment semblables. Cette condition donne la relation

$$\frac{b^2\beta^2(\cos\theta-m\sin\theta)^2+b^2\alpha^2(\sin\theta+m\cos\theta)^2}{\beta^2(a^2m^2+b^2)}=1,$$

qui devient, toutes réductions faites,

$$[b^2(\beta^2\sin^2\theta+\alpha^2\cos^2\theta)-a^2\beta^2]\,m^2+2b^2(\alpha^2-\beta^2)\cos\theta\sin\theta.m+b^2(\alpha^2-\beta^2)\sin^2\theta=0.$$

Les racines de cette équation du second degré font connaître, en général, deux directions pour lesquelles le plan

$$z=mx$$

coupe les ellipsoïdes suivant des ellipses semblables. Or ces racines ne sont réelles qu'autant que l'on a l'inégalité

$$b^4(\alpha^2-\beta^2)^2\cos^2\theta\sin^2\theta-b^2(\alpha^2-\beta^2)\sin^2\theta[b^2(\beta^2\sin^2\theta+\alpha^2\cos^2\theta)-a^2\beta^2]>0,$$

qui se réduit à la suivante

$$(\alpha^2-\beta^2)(a^2-b^2)\sin^2\theta>0.$$

Donc il faut qu'on ait

$$\alpha^2>\beta^2 \text{ et } a^2>b^2$$

ou

$$\alpha^2<\beta^2 \text{ et } a^2<b^2,$$

c'est-à-dire que les deux ellipsoïdes soient à la fois allongés ou aplatis.

Scholie. — Si dans l'inégalité

$$(\alpha^2-\beta^2)(a^2-b^2)\sin^2\theta>0$$

je remplace successivement b^2 et a^2 par $-b^2$ et $-a^2$, le premier ellipsoïde se change en un hyperboloïde à une ou à deux nappes, et j'en conclus les deux théorèmes suivants :

Un ellipsoïde et un hyperboloïde de révolution peuvent être coupés suivant des courbes semblables, 1° lorsque l'ellipsoïde est allongé et que l'hyperboloïde a une seule nappe ; 2° lorsque l'ellipsoïde est aplati et que l'hyperboloïde a deux nappes.

THÉORÈME II.

Un paraboloïde et un ellipsoïde de révolution peuvent être coupés dans deux directions différentes, suivant des courbes semblables, par un plan perpendiculaire à tout plan parallèle à leurs axes, lorsque l'ellipsoïde est aplati.

Soient

$$x^2+y^2-2pz=0$$

et

$$\frac{(x\cos\theta-z\sin\theta)^2+y^2}{\alpha^2}+\frac{(x\sin\theta+z\cos\theta)^2}{\beta^2}=1$$

les équations d'un paraboloïde de révolution autour de l'axe des z, et d'un ellipsoïde de révolution autour de la droite

$$y=0,\qquad z+x\cot\theta=0.$$

Je coupe ces surfaces par le plan

$$z=mx.$$

Les deux sections se projettent sur le plan xy suivant des courbes qui ont pour équations

$$x^2+y^2-2pmx=0$$

et

$$\frac{\beta^2(\cos\theta-m\sin\theta)^2+\alpha^2(\sin\theta+m\cos\theta)^2}{\alpha^2\beta^2}x^2+\frac{y^2}{\alpha^2}=1.$$

Ces sections seront semblables, si l'on a la relation

$$\beta^2(\cos\theta-m\sin\theta)^2+\alpha^2(\sin\theta+m\cos\theta)^2=\beta^2,$$

qui devient, toutes réductions faites,

$$(\beta^2\sin^2\theta+\alpha^2\cos^2\theta)m^2+2(\alpha^2-\beta^2)\cos\theta\sin\theta.m+(\alpha^2-\beta^2)\sin^2\theta=0.$$

Les racines de cette équation déterminent généralement deux directions du plan sécant $z=mx$, pour lesquelles les sections sont semblables. Mais ces racines ne sont réelles que lorsqu'on a l'inégalité

$$(\alpha^2-\beta^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta-(\alpha^2-\beta^2)\sin^2\theta(\beta^2\sin^2\theta+\alpha^2\cos^2\theta)>0,$$

qui se réduit à

$$(\alpha^2-\beta^2)\sin^2\theta<0.$$

Donc il faut qu'on ait $\alpha^2<\beta^2$, c'est-à-dire que l'ellipsoïde soit aplati.

Scholie I. — L'inégalité

$$(\alpha^2-\beta^2)\sin^2\theta<0$$

prouve aussi, lorsqu'on y remplace β^2 par $-\beta^2$ ou α^2 par $-\alpha^2$, qu'un paraboloïde et un hyperboloïde à deux nappes peuvent être coupés par le même plan suivant des courbes semblables, lorsqu'ils sont de révolution, tandis que cette propriété n'existe pas pour un paraboloïde et un hyperboloïde à une seule nappe.

Scholie II. — La section faite dans le paraboloïde de révolution par le plan $z = mx$ se projette sur le plan xy, perpendiculaire à l'axe du paraboloïde, suivant une courbe qui a pour équation

$$y^2 + x^2 - 2pmx = 0.$$

Donc cette projection est toujours un cercle, tant qu'on ne donne à m que des valeurs finies, c'est-à-dire tant que la section est une ellipse.

FIN.

LEÇONS NOUVELLES

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Ouvrages du même auteur

LEÇONS NOUVELLES

DE

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

1 vol. in-8°. Prix : 6 fr.

LEÇONS NOUVELLES

D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

1 vol. in-8°. Prix : 4 fr.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GUIRAUDET ET JOUAUST,
338, RUE SAINT-HONORÉ.

LEÇONS NOUVELLES

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR A. AMIOT

Professeur de mathématiques au Lycée Saint-Louis, à Paris

PLANCHES

PARIS

CHEZ GUIRAUDET ET JOUAUST

IMPRIMEURS-LIBRAIRES

RUE SAINT-HONORÉ, No 338

1853

Fig. 1.

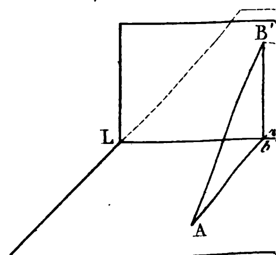
S L A T P I

2

S, P L T A, I

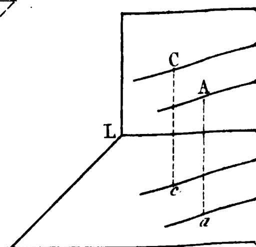
5

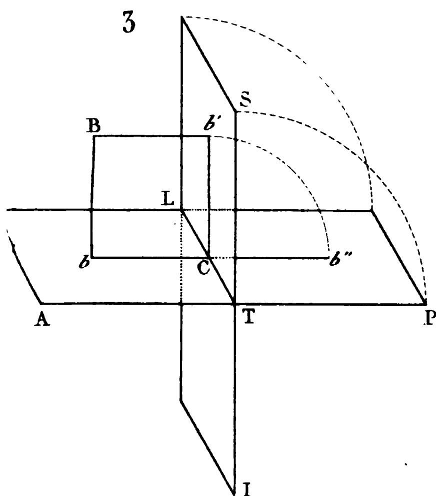
B' L b a' T A

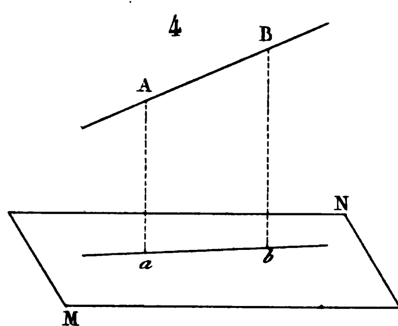


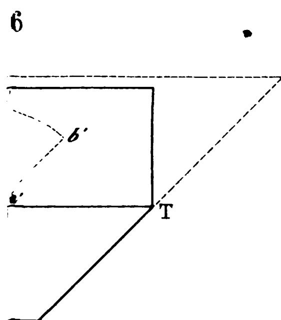
8

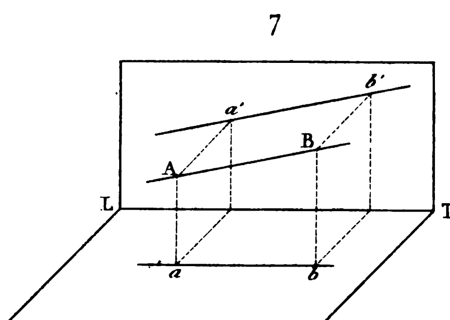
b' b' B L a' T A

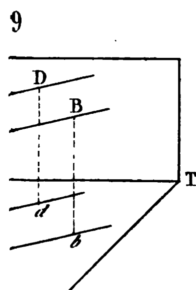


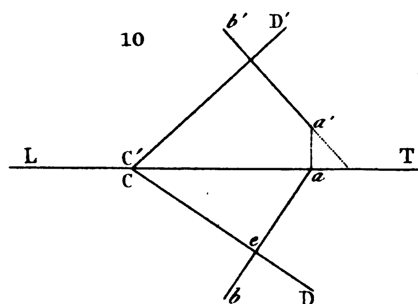






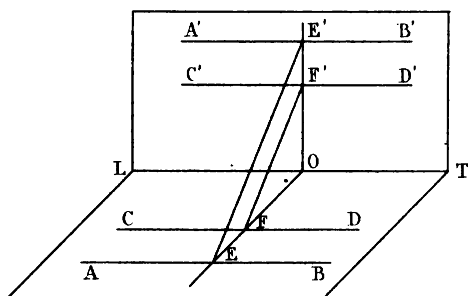




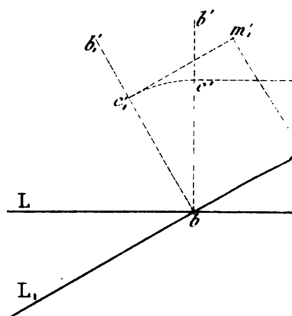


Dulos del et sc

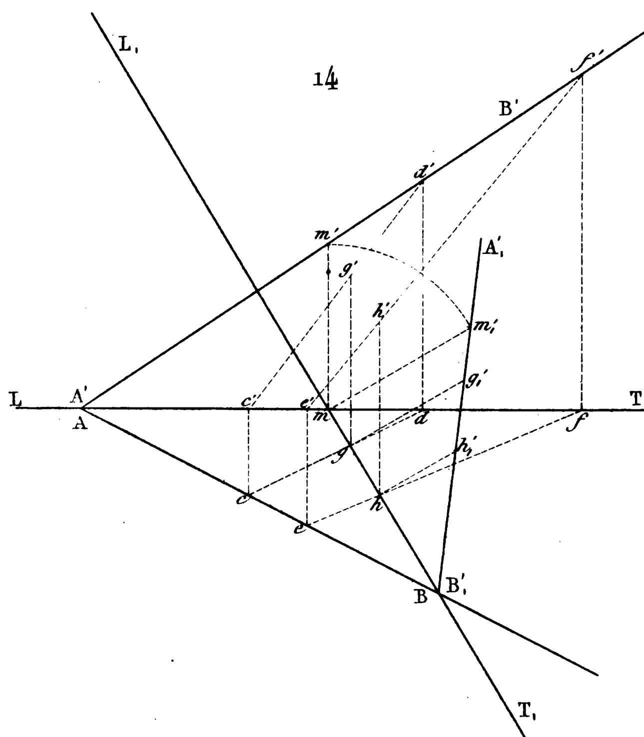
Fig. 11

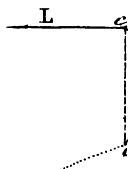


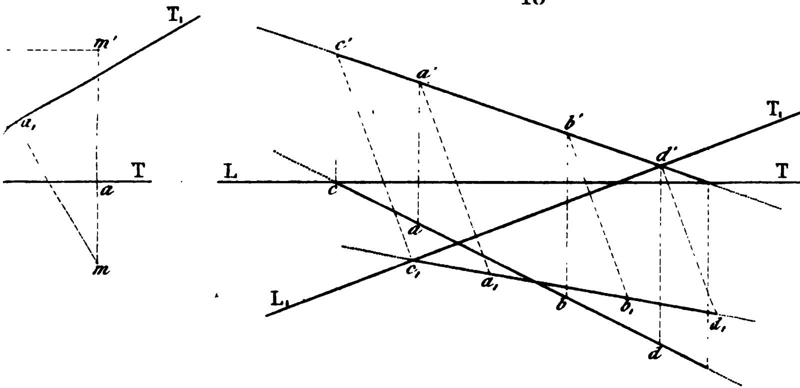
12

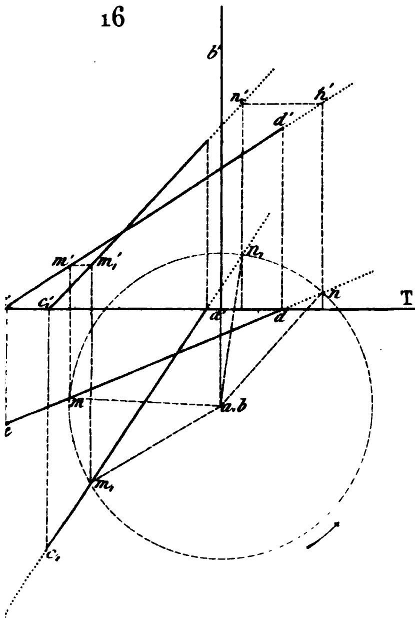


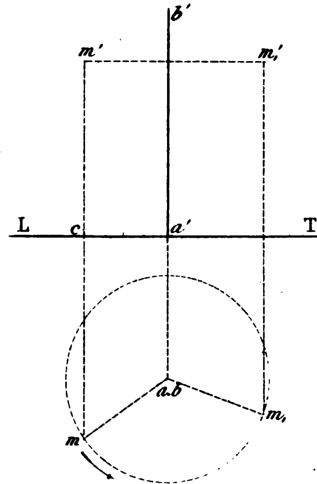
14





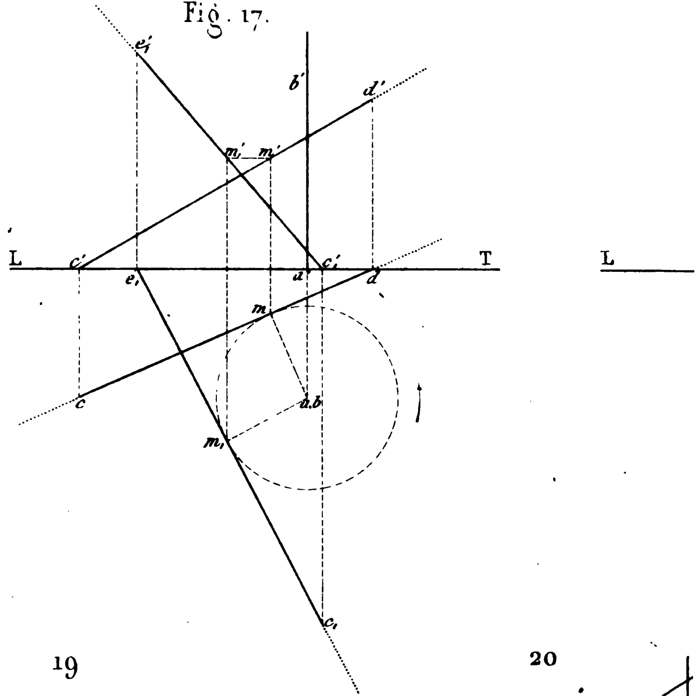






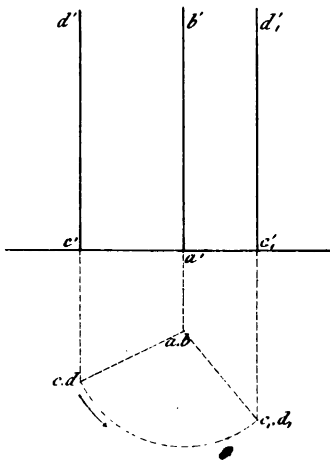
Dulos del et sc

Fig. 17.



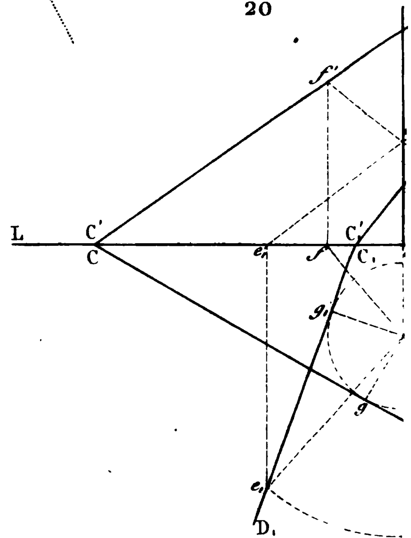
e'1
b'
d'
m'
m'
L
c'
e1
a'
c'1
d
T
L
m
c
a.b
m1
c1

19

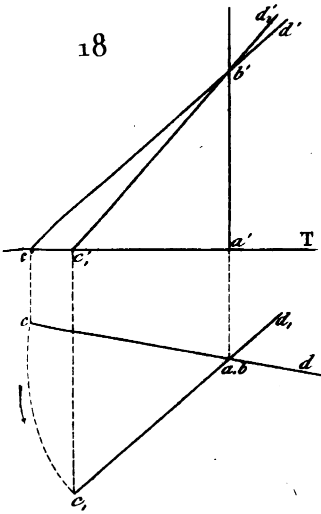


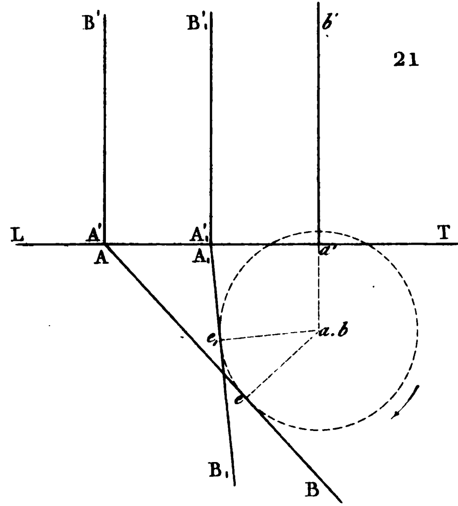
d'
b'
d'1
c'
a'
c'1
a.b
c.d
c1.d1

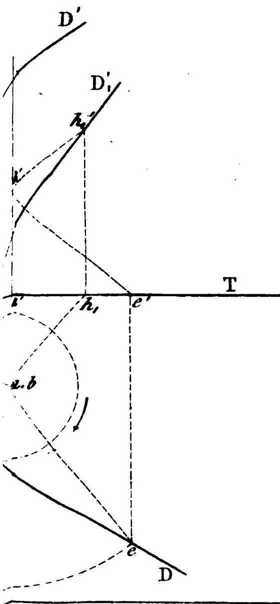
20

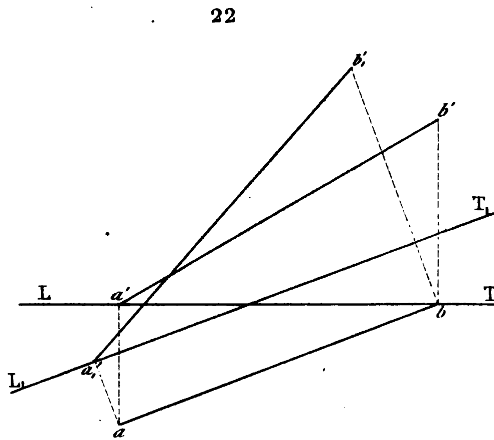


f'
L
C'
C
e1
f
C'
C1
g1
g
e1
D1

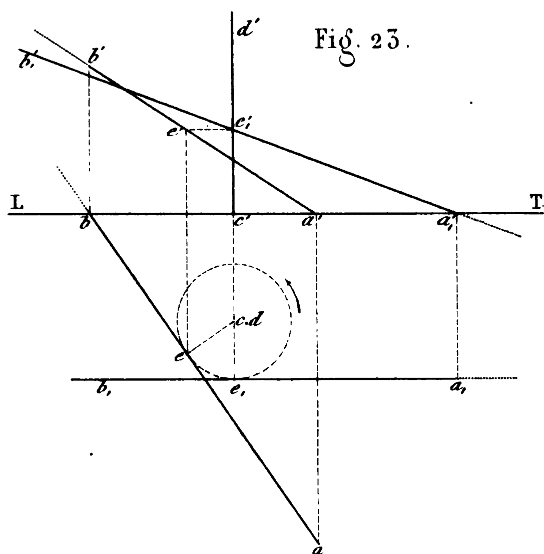


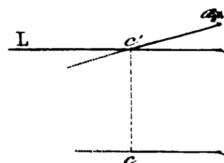


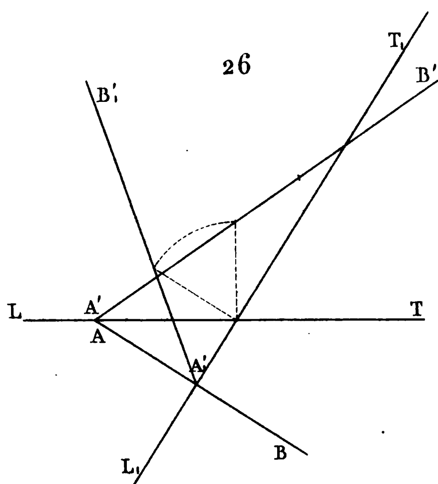


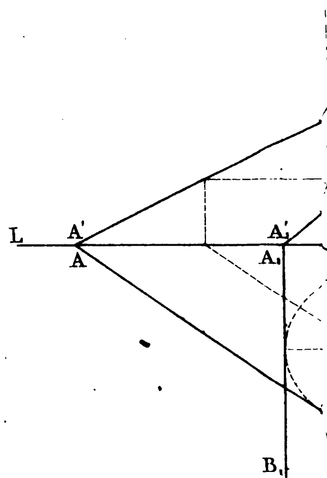


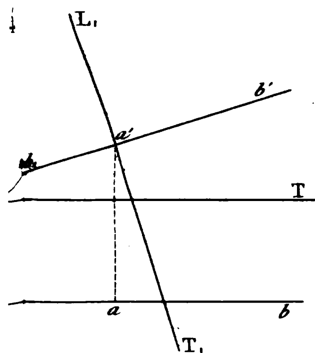
Dulos del et sc

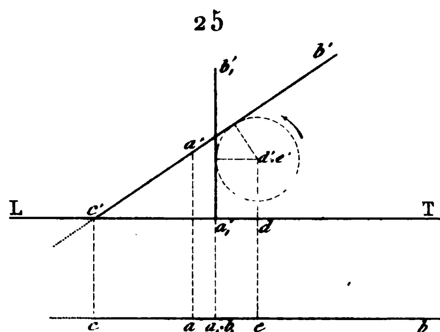

Fig. 23.
d'
b'
b'
e'
e'
L
T
b
c'
a'
a'
c.d
e
b'
e'
a'
a

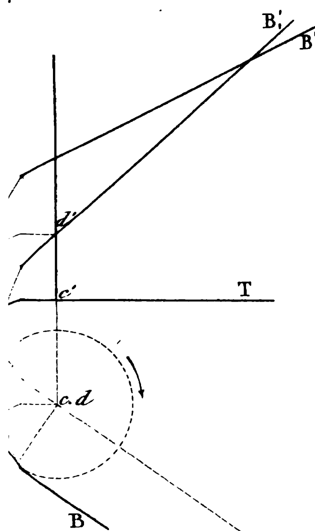

24
L
c'
c

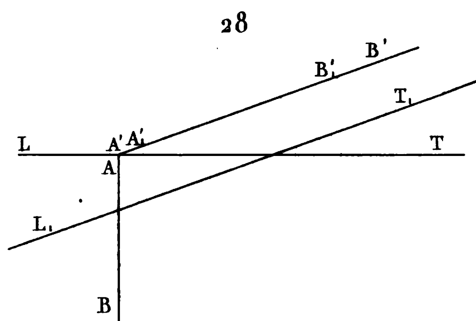

26
T'
B'
B'
L
A'
A
T
A'
L'
B

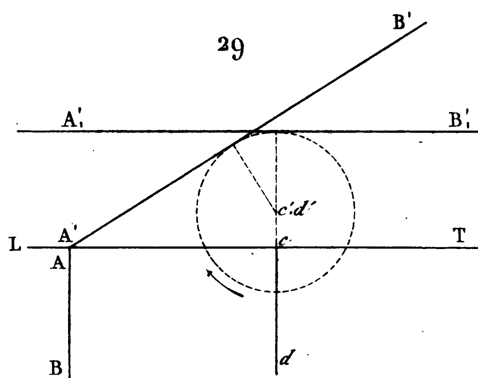

27
L
A'
A
A'
A'
B'



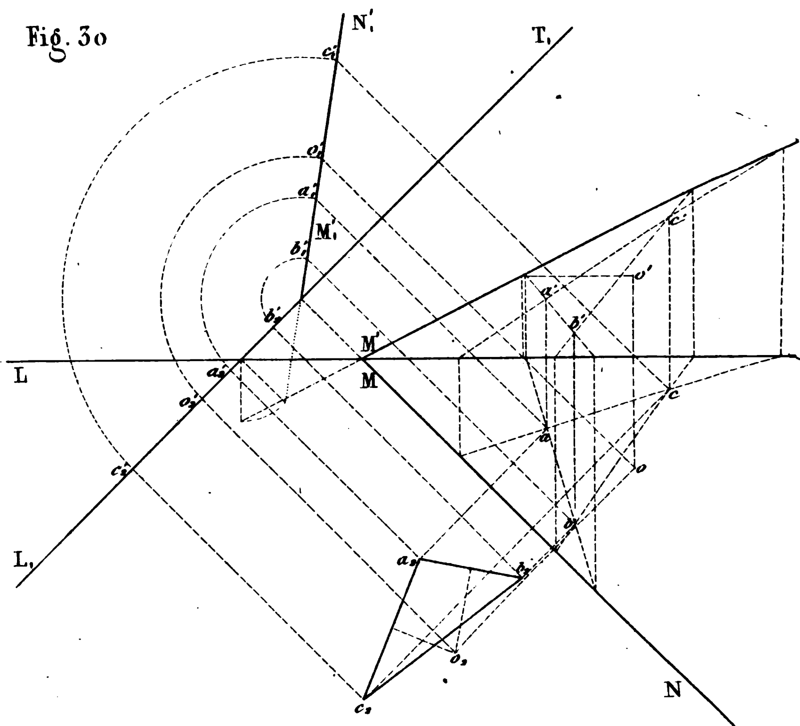


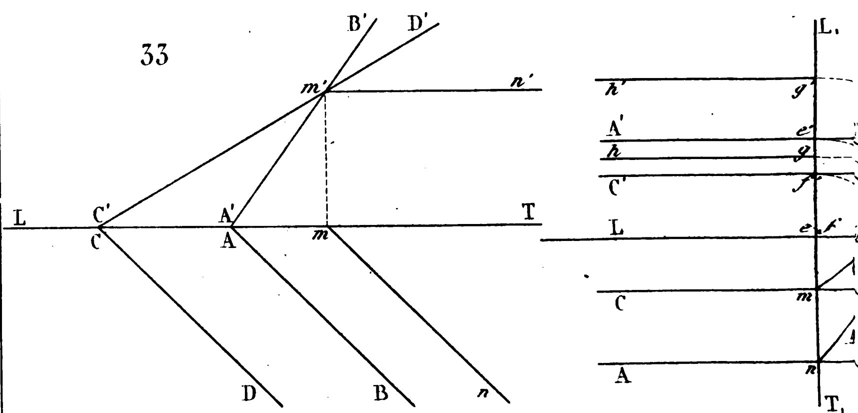


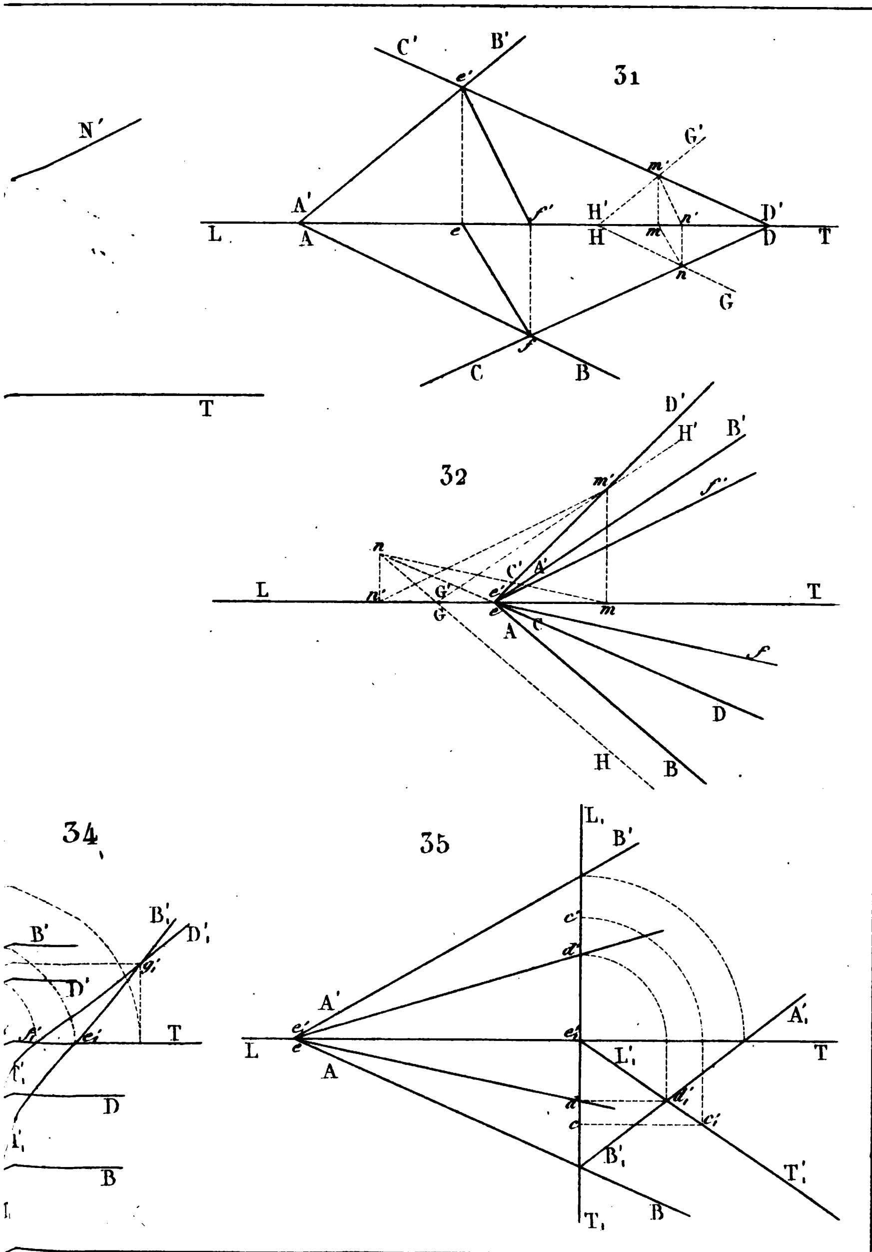




Dulos del et sc.


Fig. 30
N'₁
T₁
M'₁
M'
L
M
L₁
N


33
B'
D'
m'
n'
L
C'
C
A'
A
m
T
D
B
n
L₁
h'
g'
A'
e'
h
g
C'
f'
L
e
f
C
m
A
n
T₁



Dulos del et sc.

Fig 36

D'

a'

g'

L C' b' e' T

C f

a

g

e

b D

37

L C' g

C

g

F

39

N'

b'

p'

c'

f' d'

h'

e'

L M' g' a' T

M b

p

g f c e

a

h

d

N

C

L B' I

B

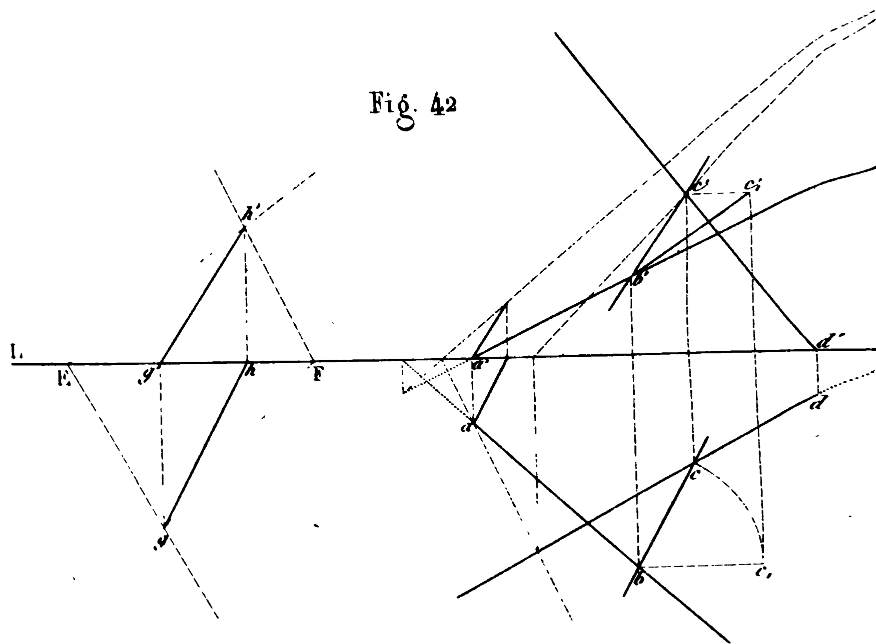
38

40

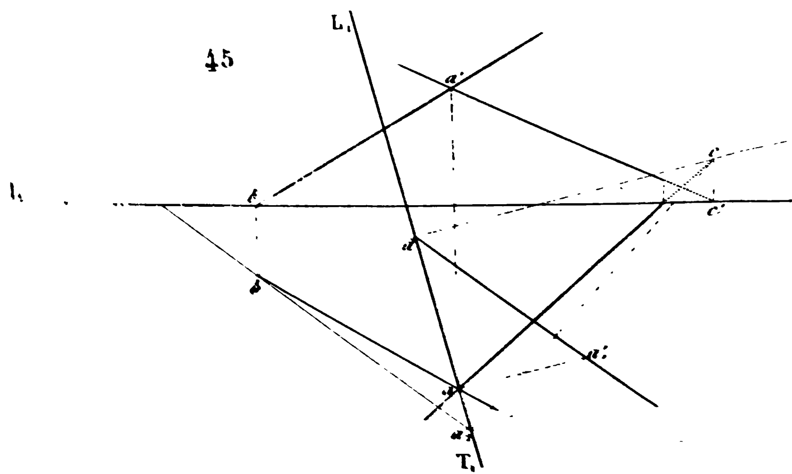
41

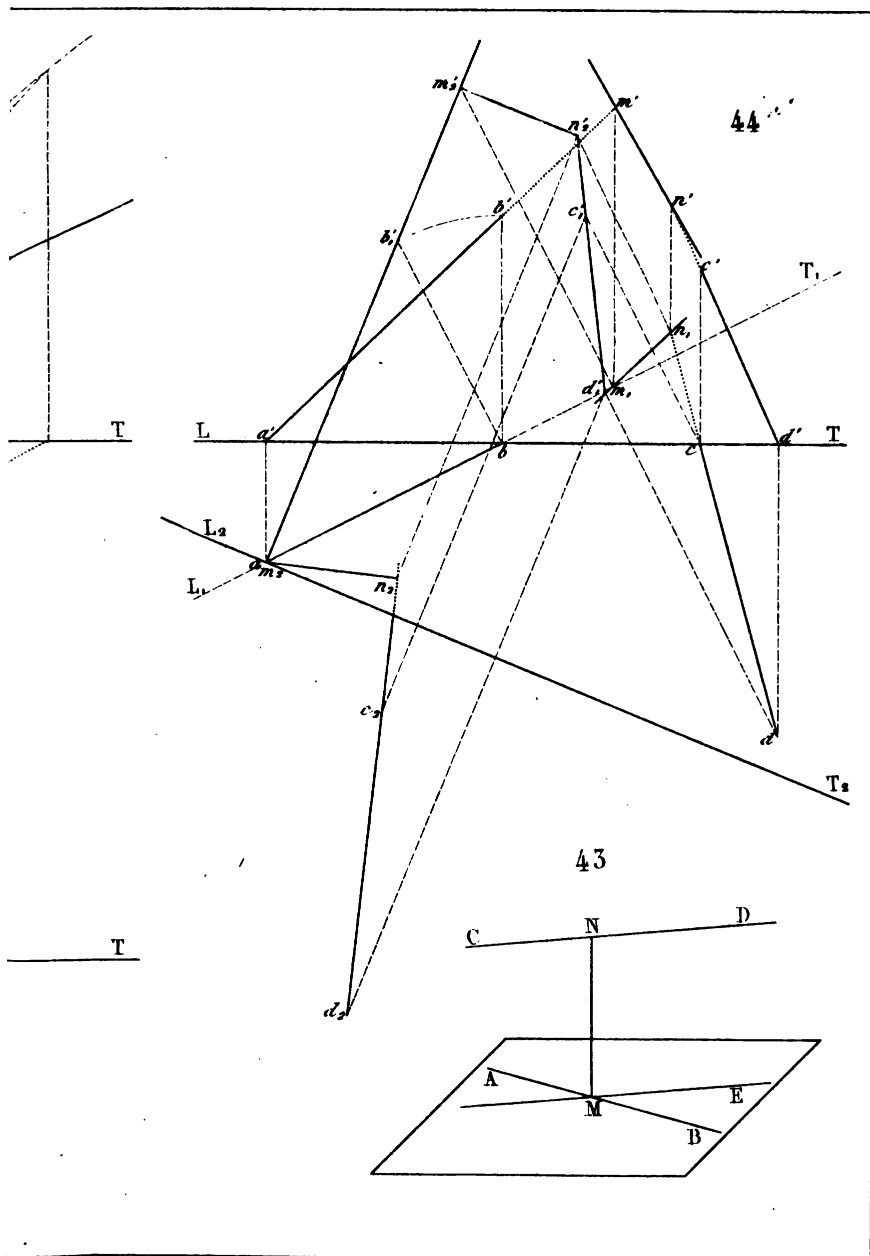
Duios del. et sc.

Fig. 42

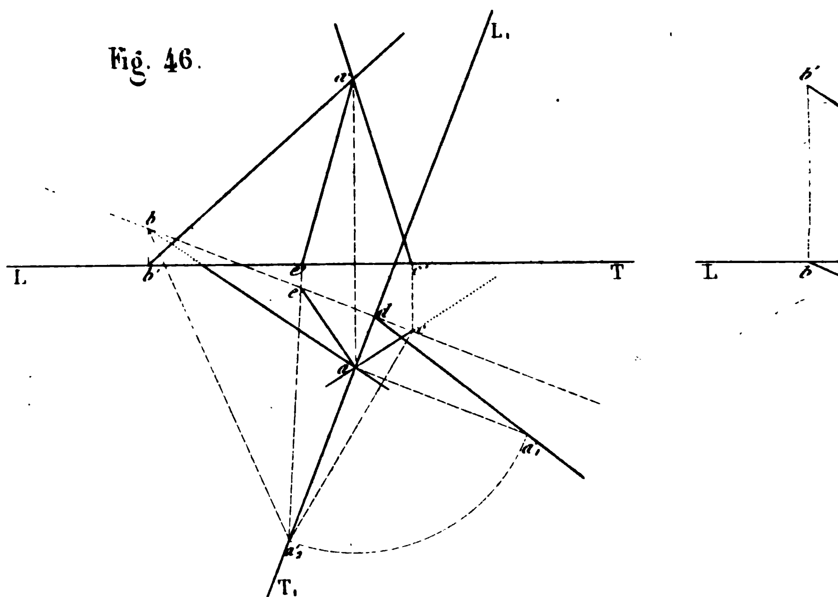


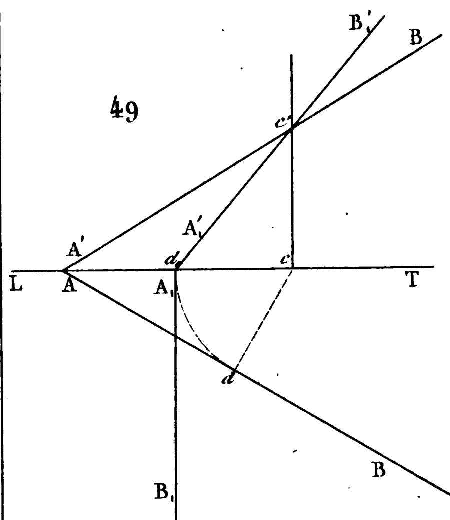
45

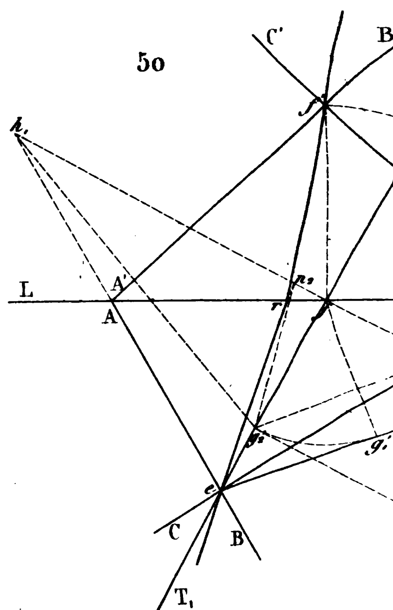


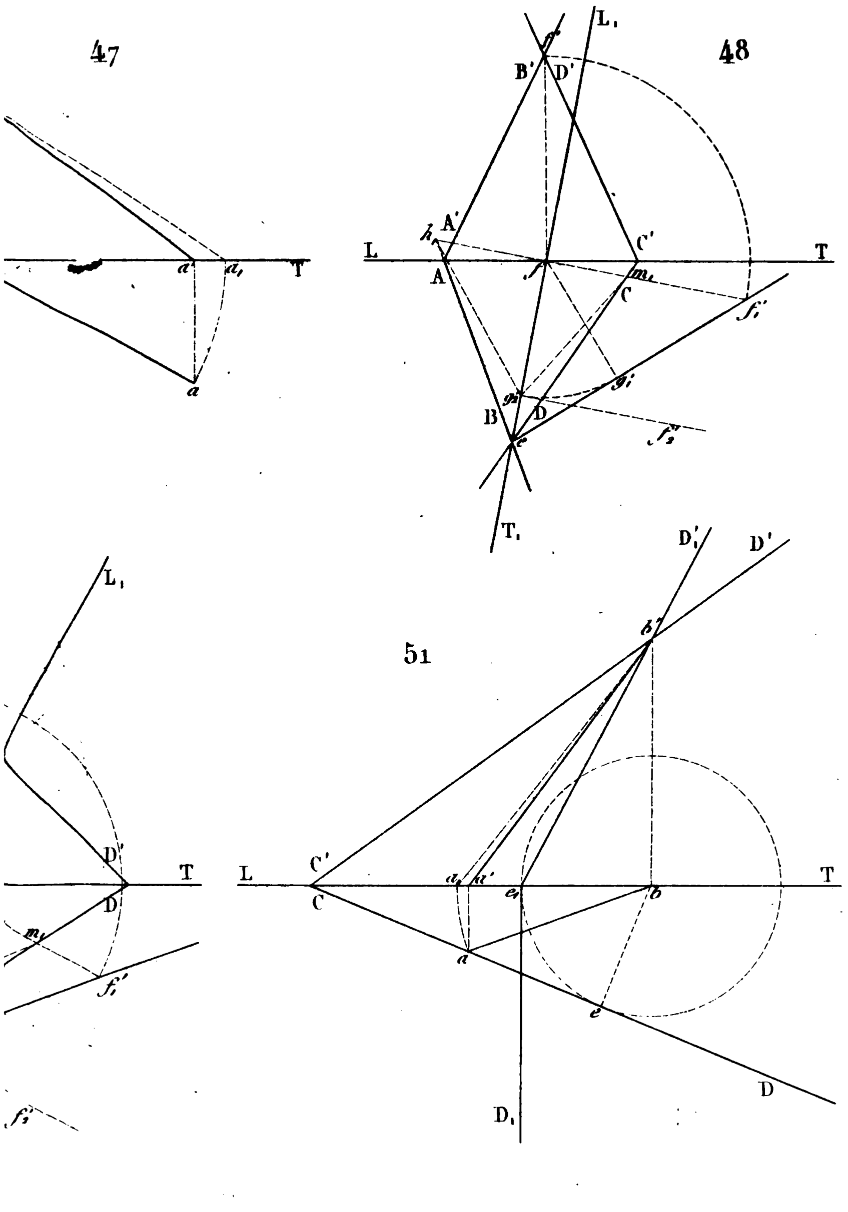


Dulos del et sc

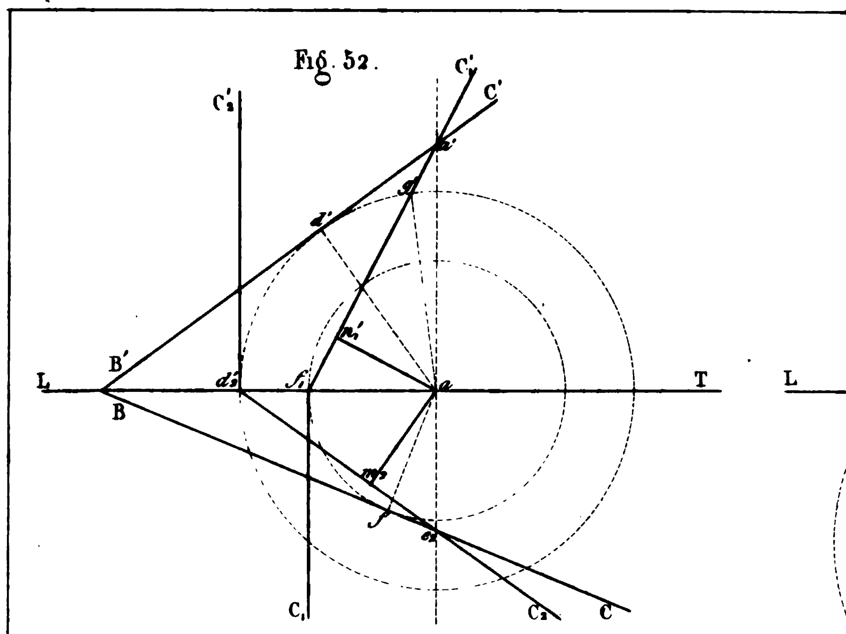

Fig. 46.
L
T
L,
T,
L
T

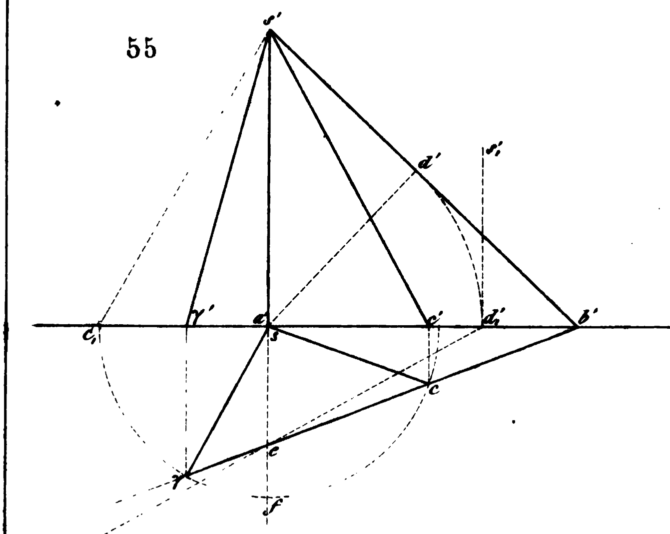

49
B'
B
A'
A
L
T
B,
B

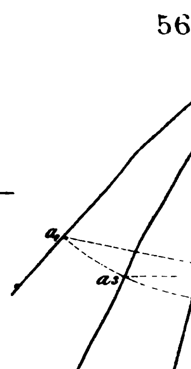

50
C'
B
L
A'
A
C
B
T,



Dulos del et sc


Fig. 52.
C'₁
C'
C'₂
B'
L₁
B
T
L
C₁
C₂
C


55
s'
d'
γ'
c'
d'₁
b'
c₁
c
e
γ
f


56

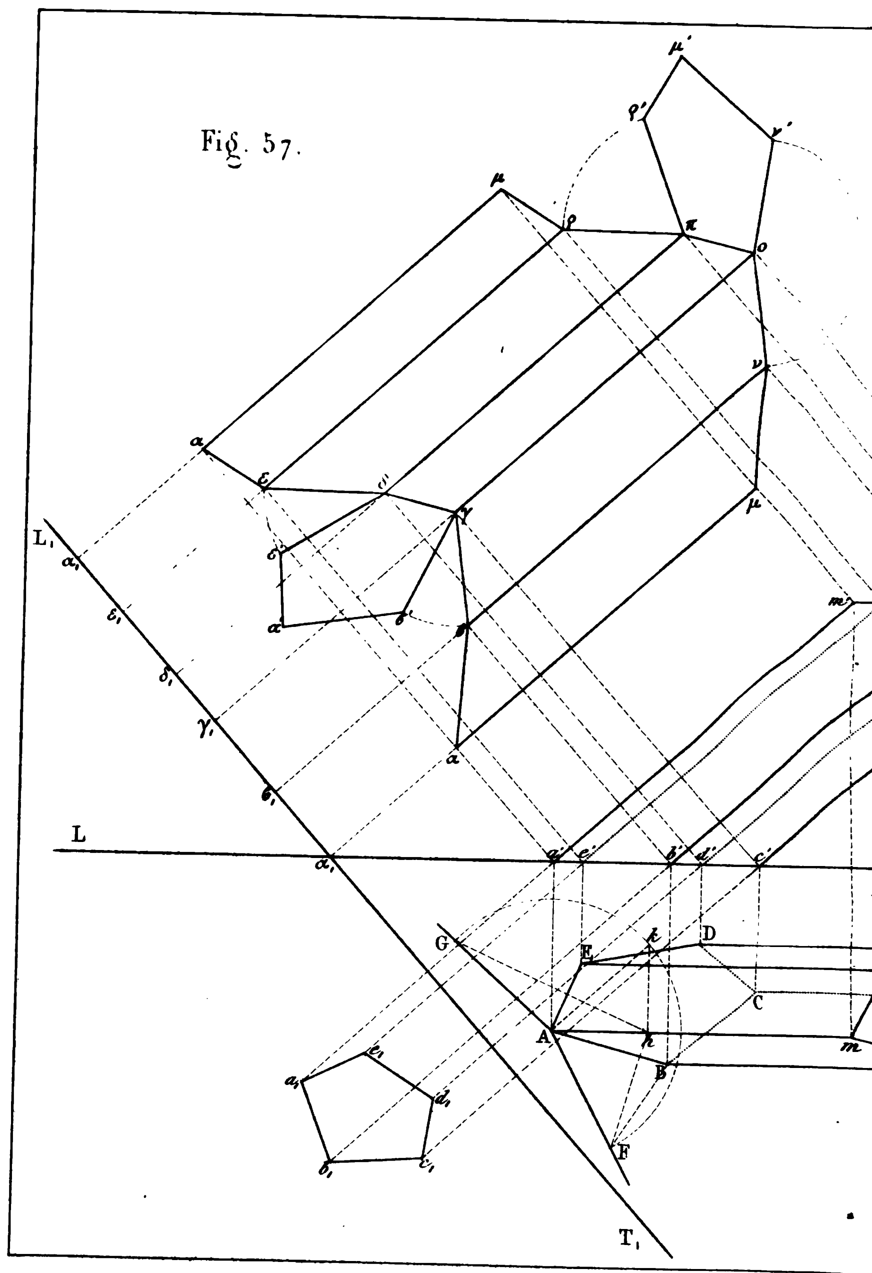
53

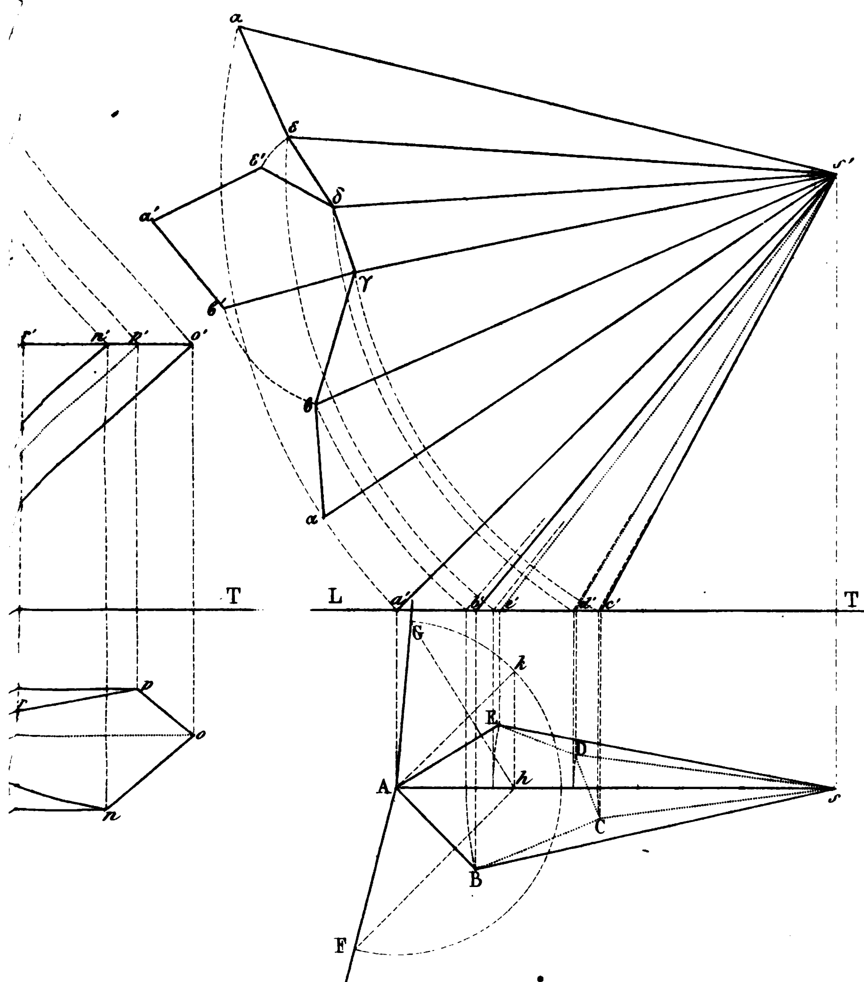
s'
γ
c₂
h'
T
c₁'
a'
s
c'
b'
n'
m'
c₃
c
C'

S
a₂
e
d
a
C

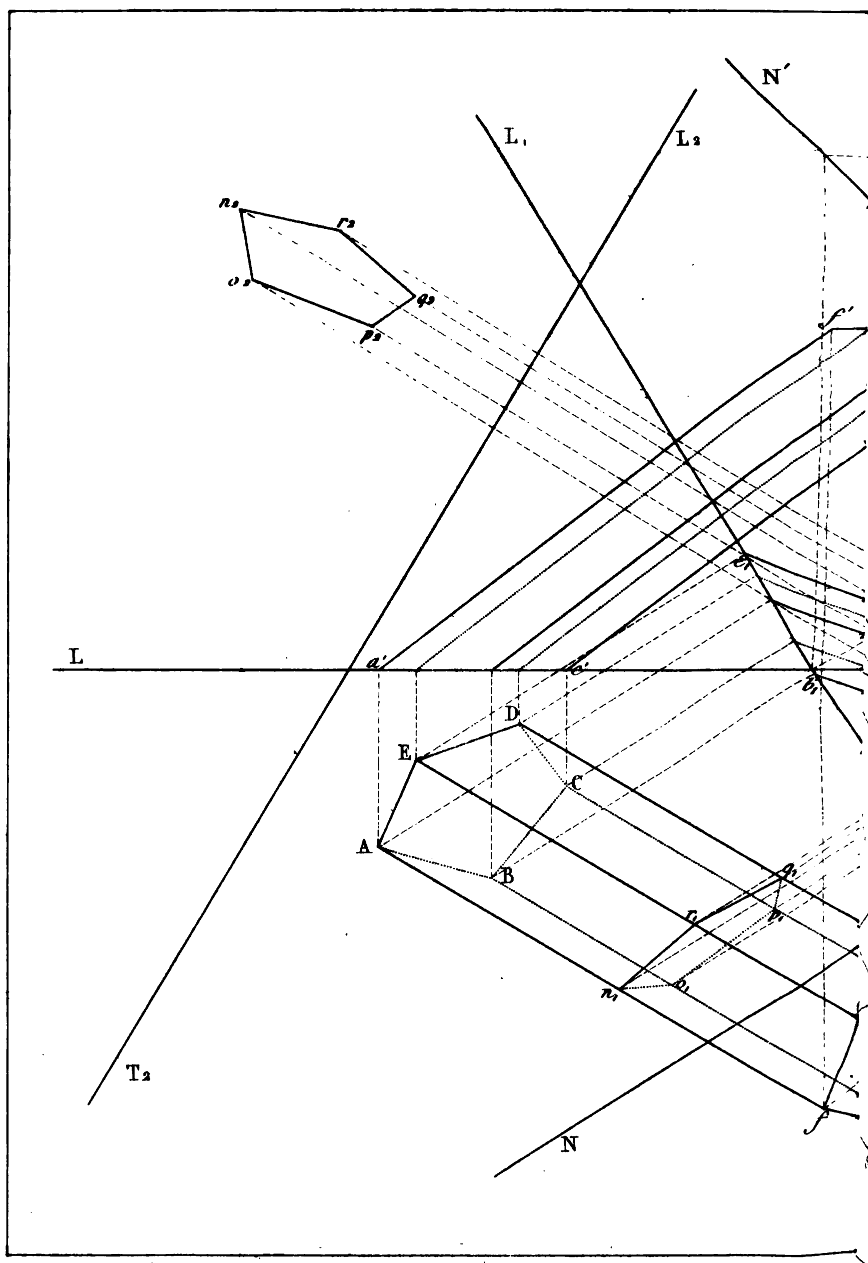
54

s'
a'
s
c'
c₁
b'
L
T
c

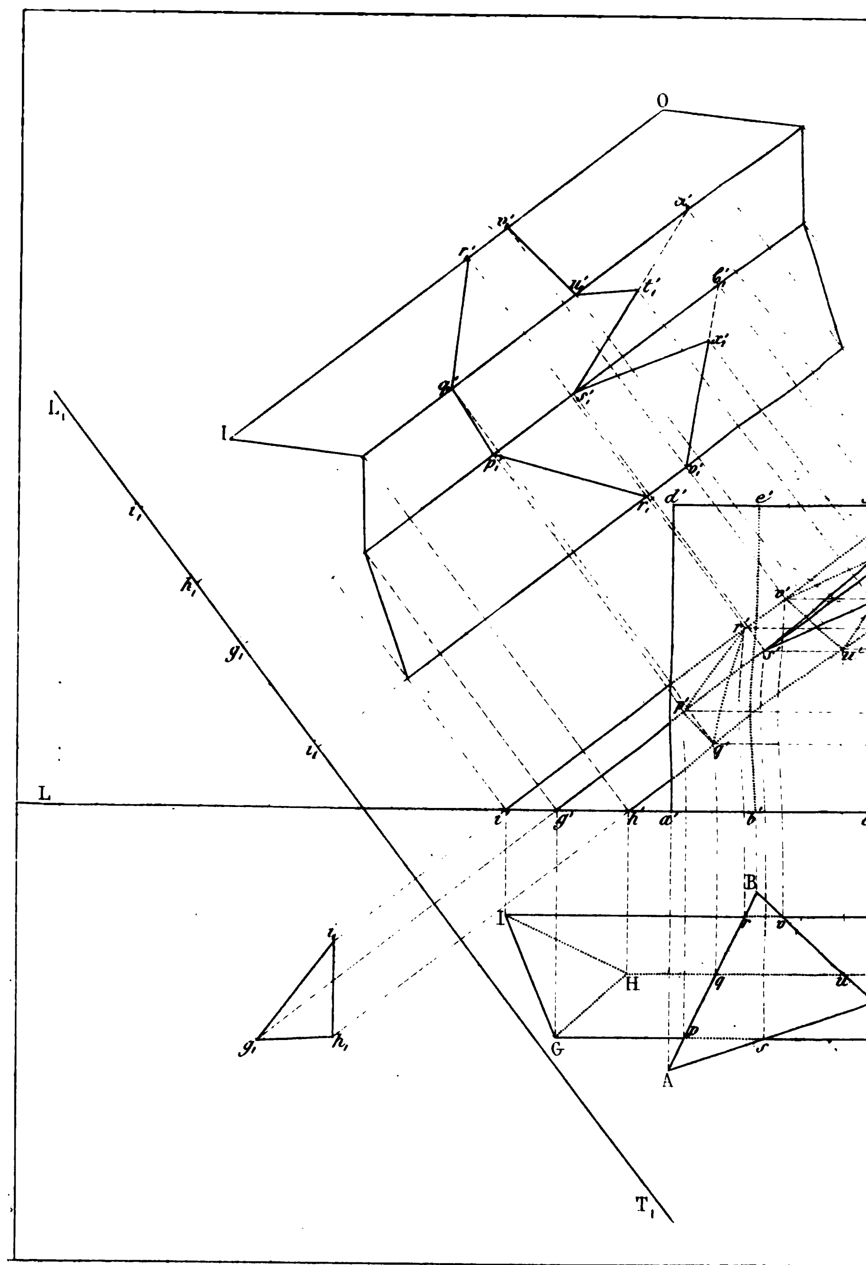

Fig. 57.
L
L₁
T₁
A
B
C
D
E
F
G

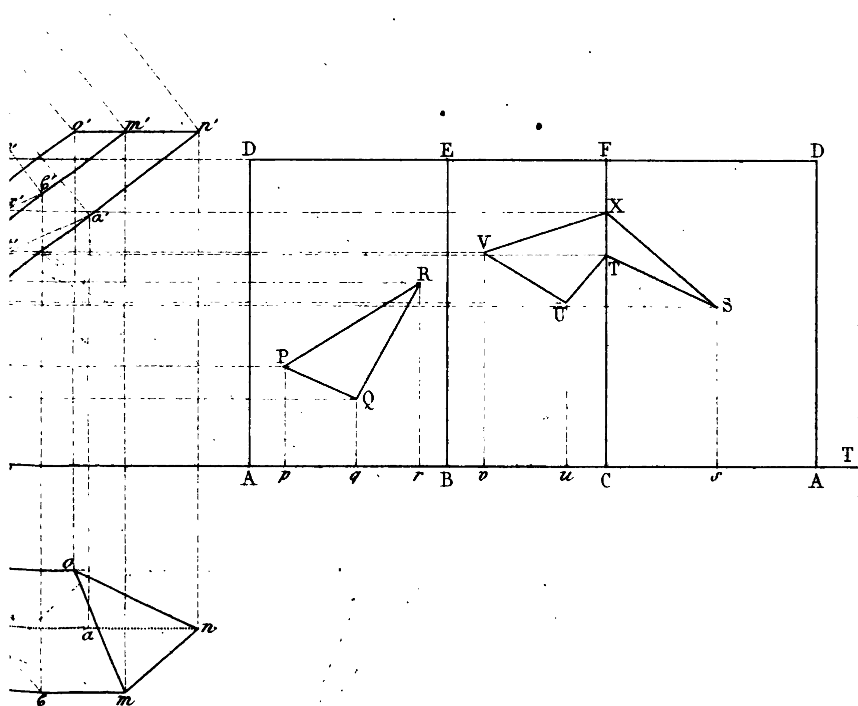


Dulos del. et sc.



N′
L₁
L₂
n₂
r₂
o₂
q₂
p₂
f′
L
a′
c′
b₁
D
E
C
A
B
q₁
r₁
p₁
n₁
o₁
T₂
N
f


O
I
L₁
T₁
L
G
H
A
B



Dulos del. et sc.

Fig. 64

a b c d e

a' b' c' d' e'

a b c d e

a' b' c' d' e'

65

A A' A''

M M' M''

B B' B''

L

66

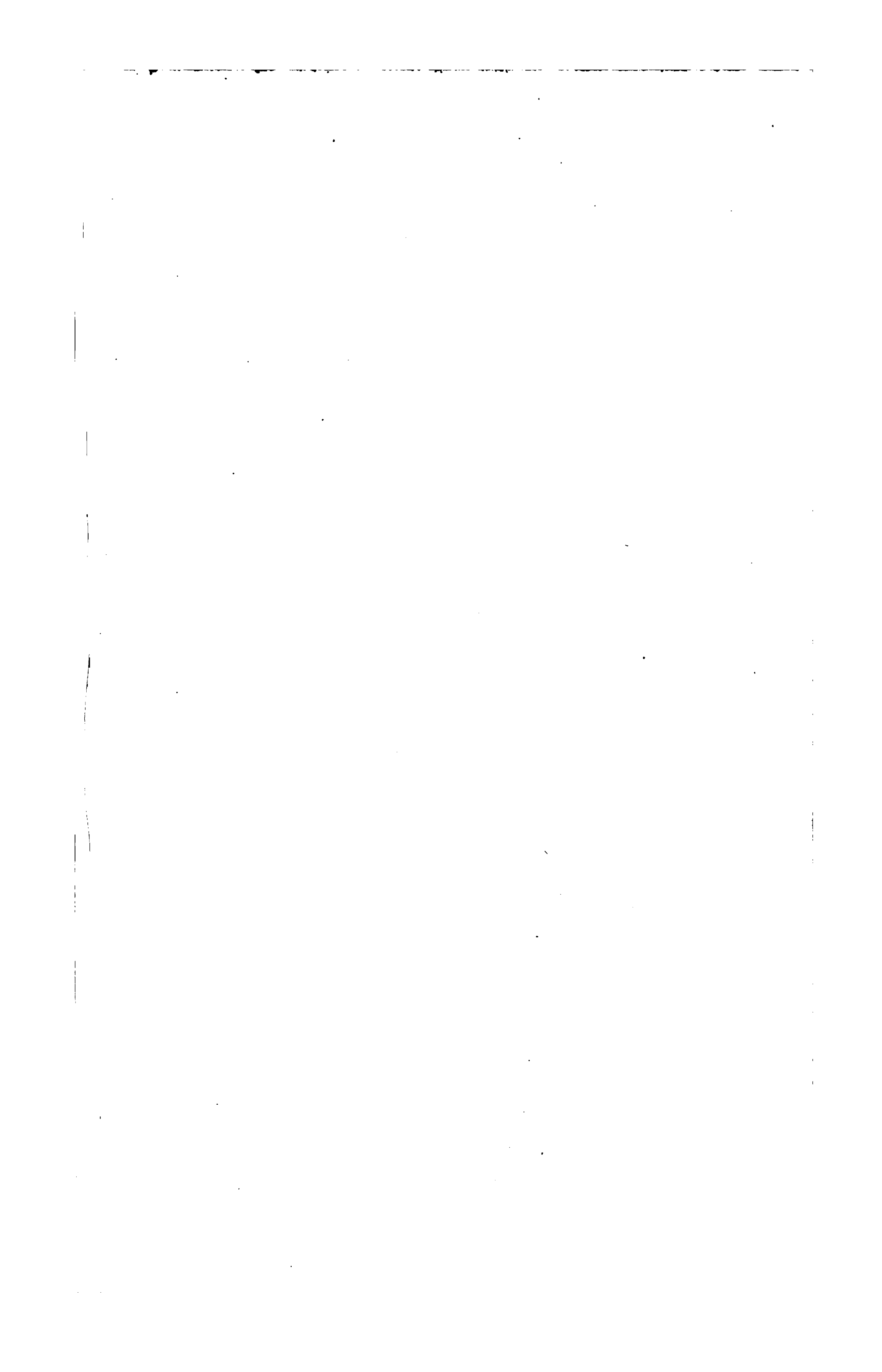
A A'

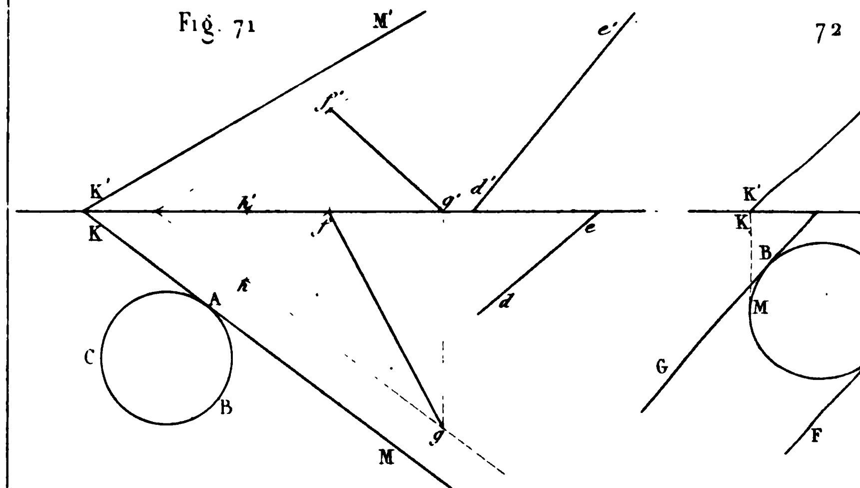
M M'

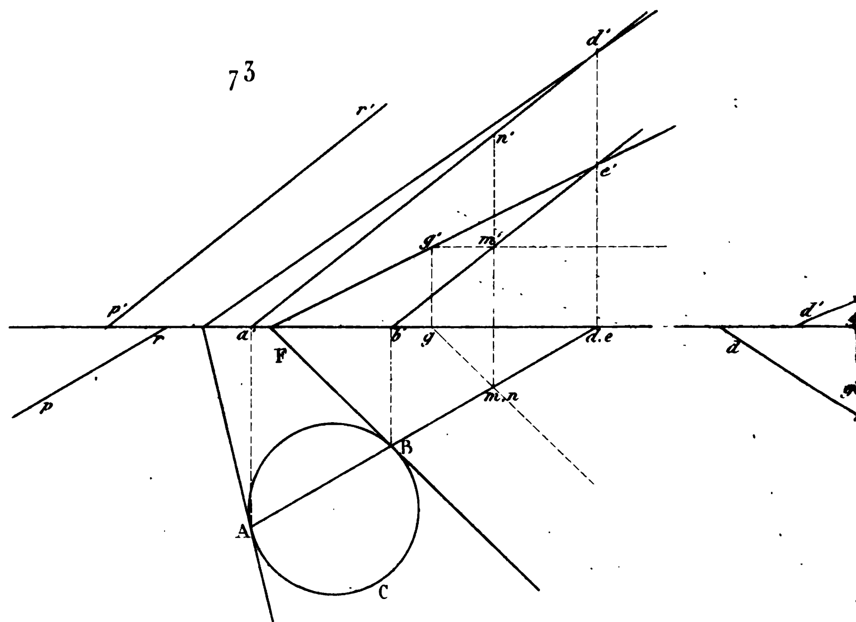
B B'

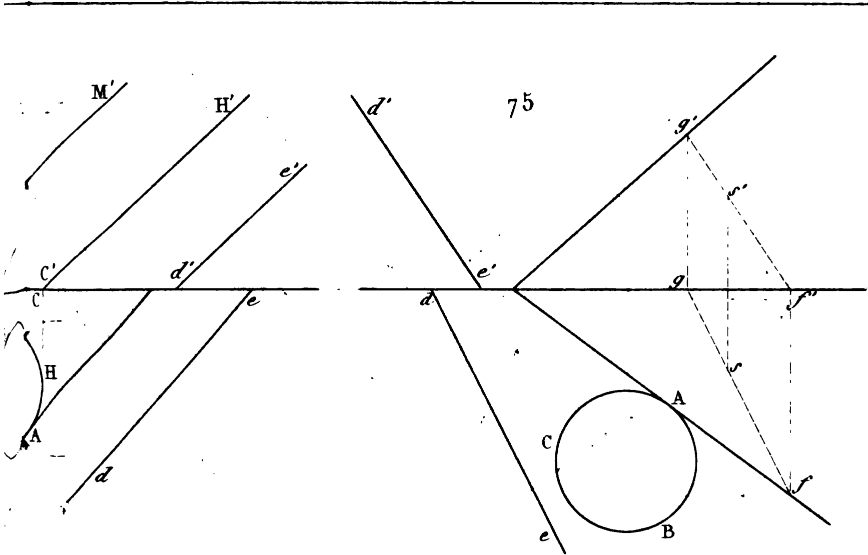
P Q

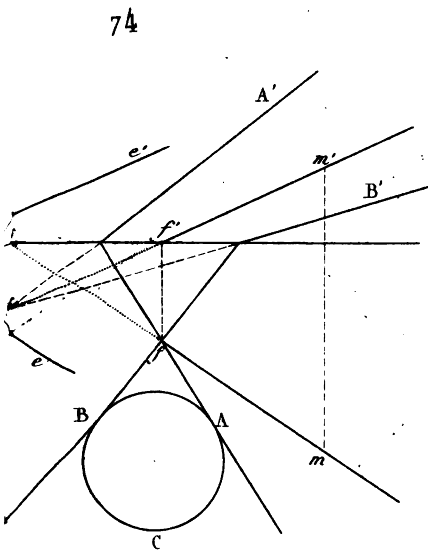
M A E C T L e

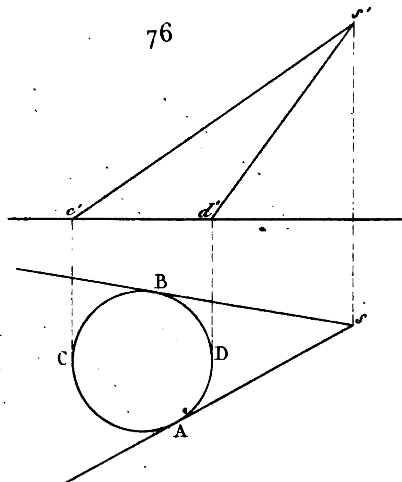



Fig. 71
M'
e'
72
f''
K'
k'
g'
d'
K
f
e
B
A
k
M
d
C
G
B
g
M
F

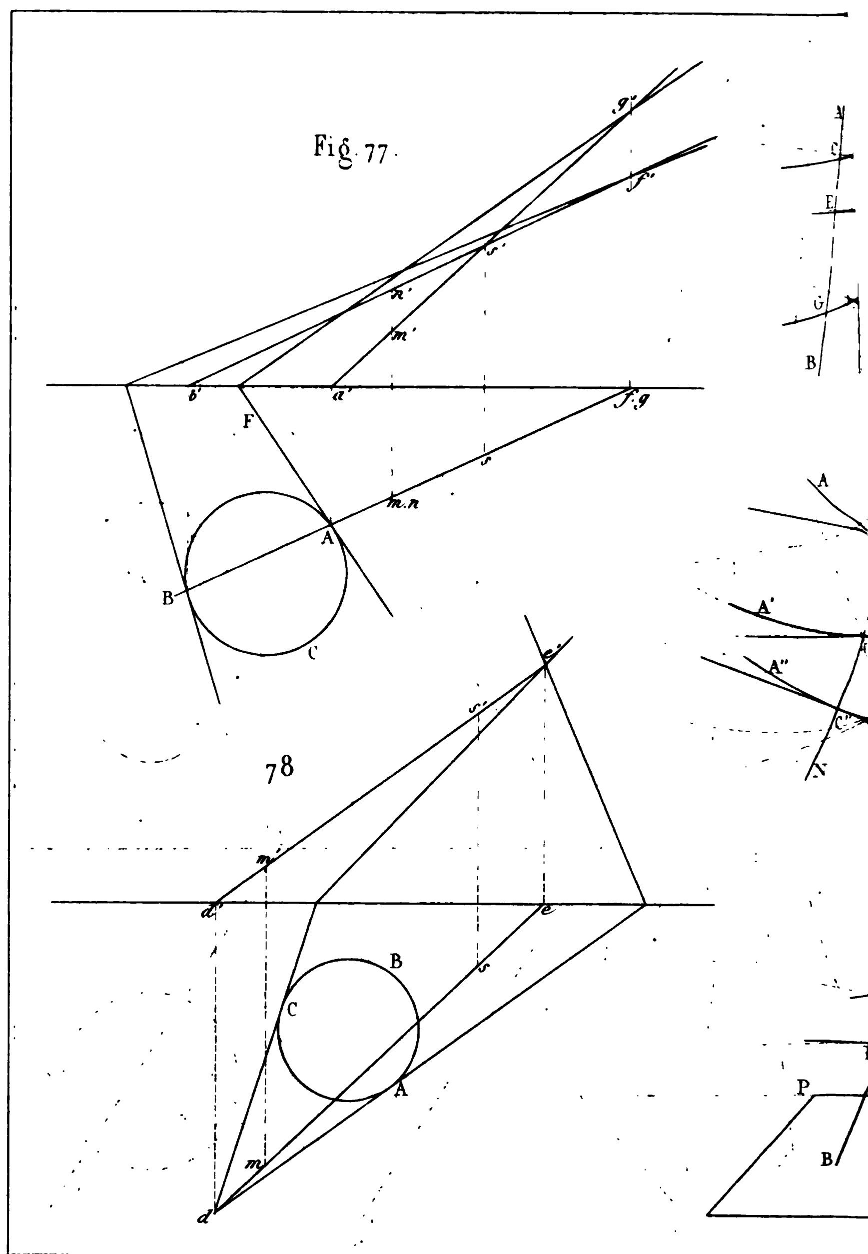

73
d'
r'
n'
e'
g'
m'
p'
a'
b'
g
d.e
d'
r
F
d
p
m.n
B
A
C

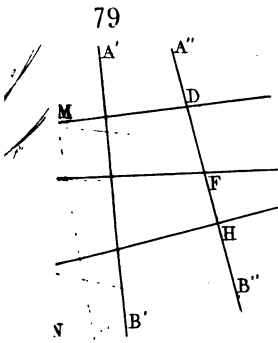


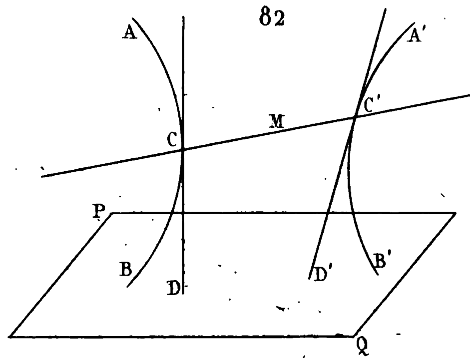


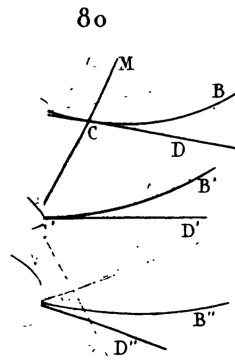


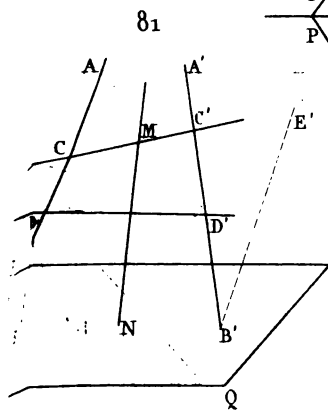
Dulos del et sc.

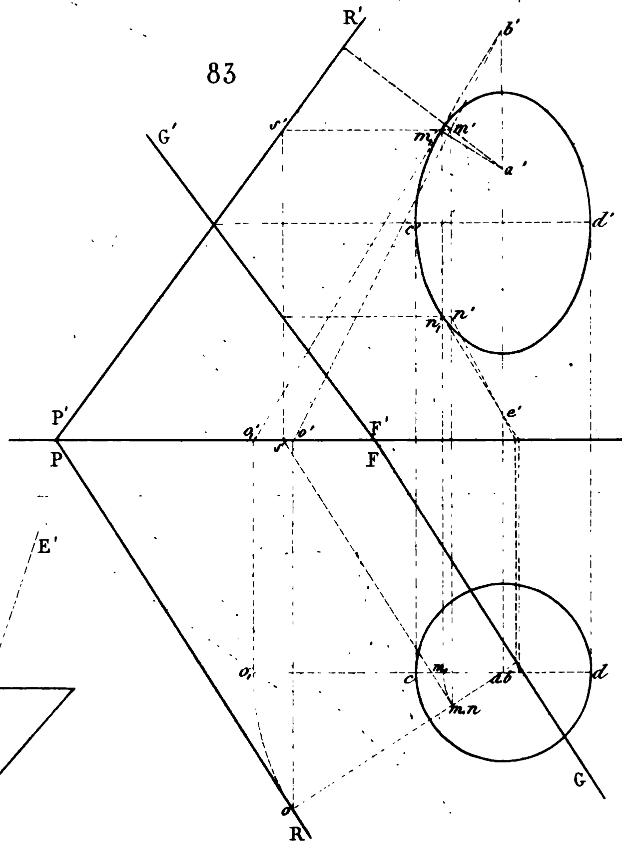

Fig. 77.
g'
f'
s'
n'
m'
b'
a'
f.g
F
s
m.n
A
B
C
78
e'
s'
m'
d'
e
B
C
s
A
m
d



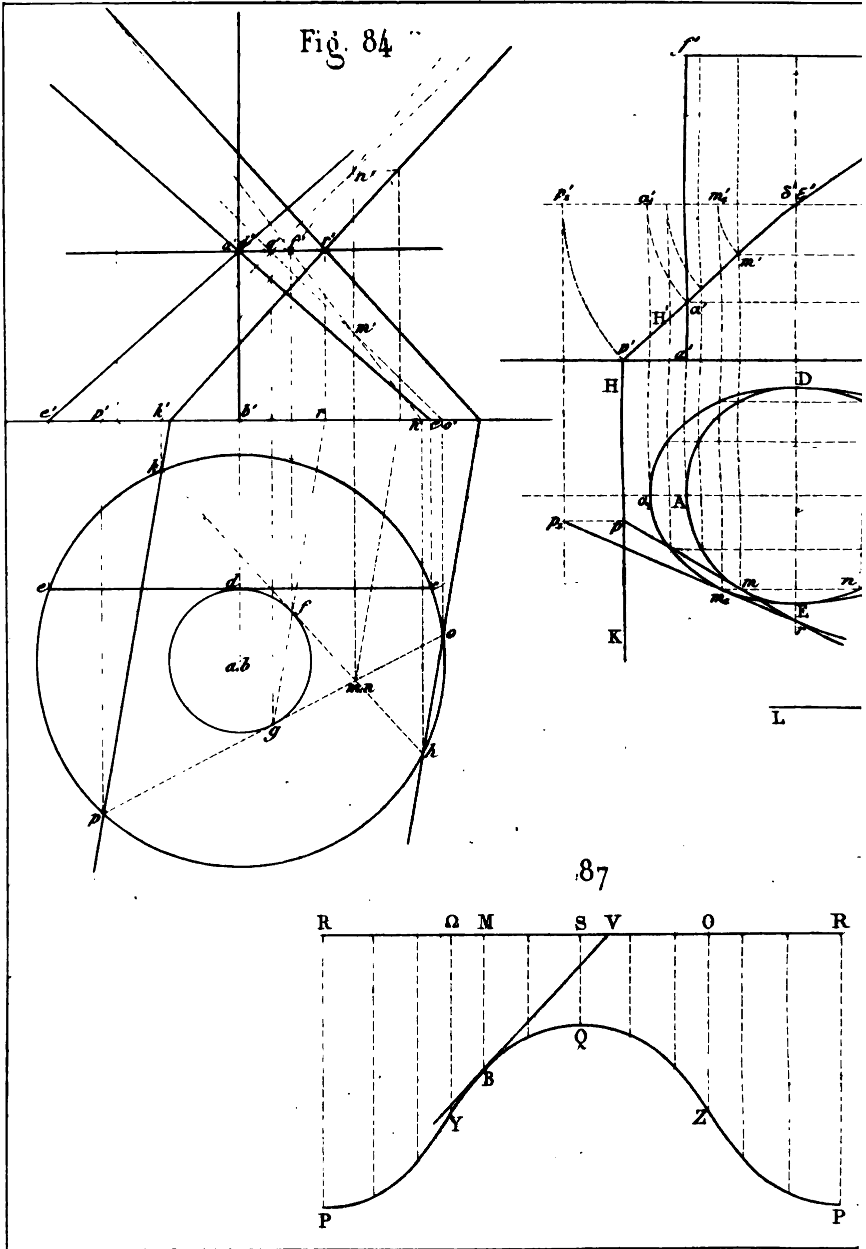








Dulos del. et sc.


Fig. 84
87
R
Ω
M
S
V
O
R
Q
B
Y
Z
P
P
H
D
A
E
K
L

85

86



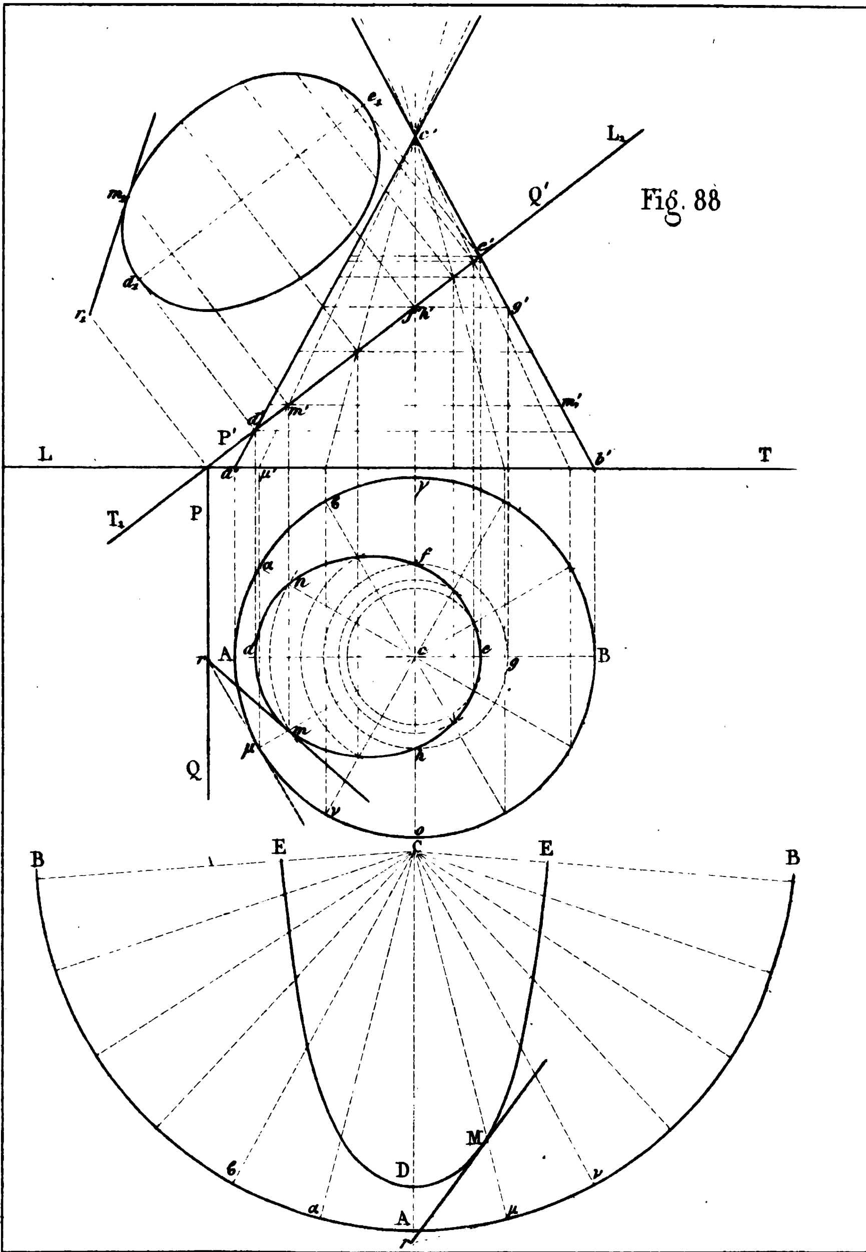
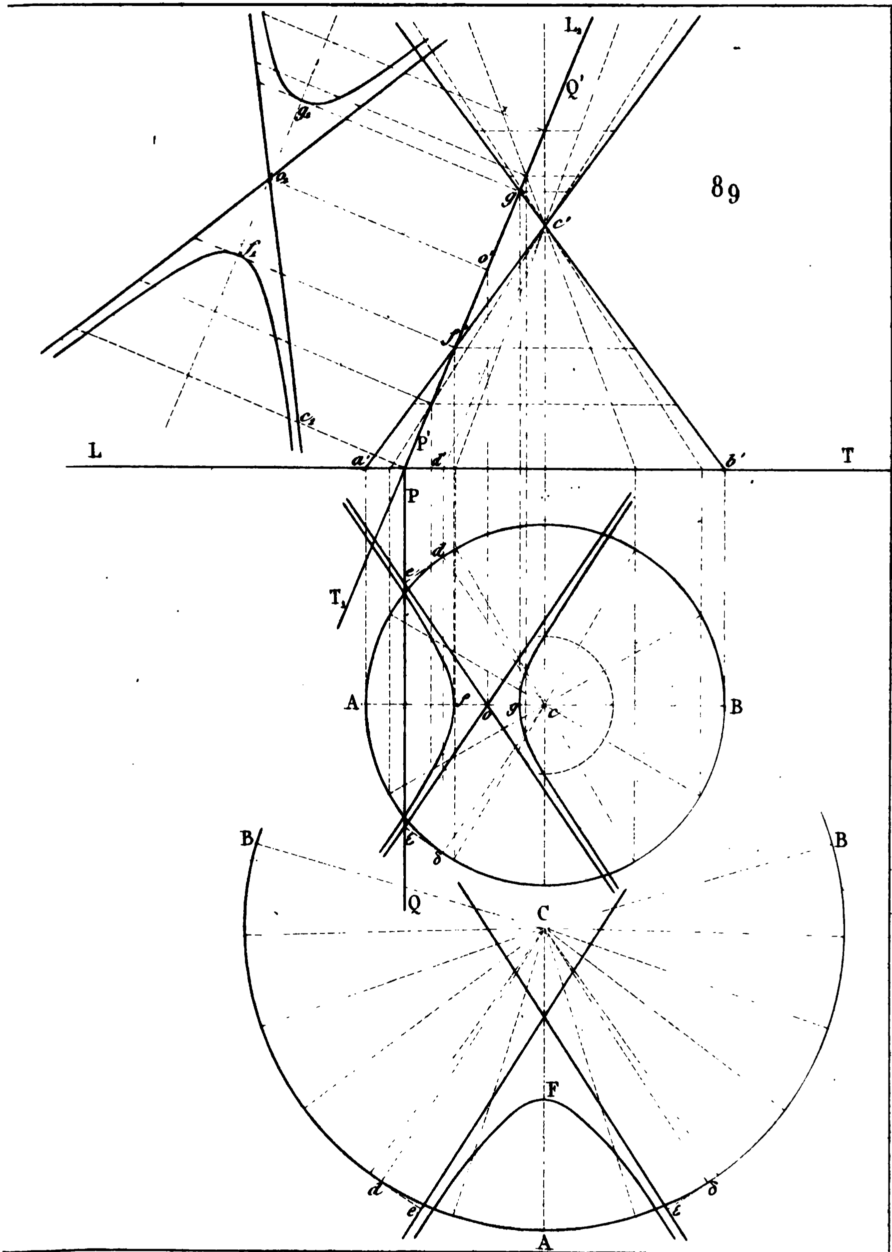
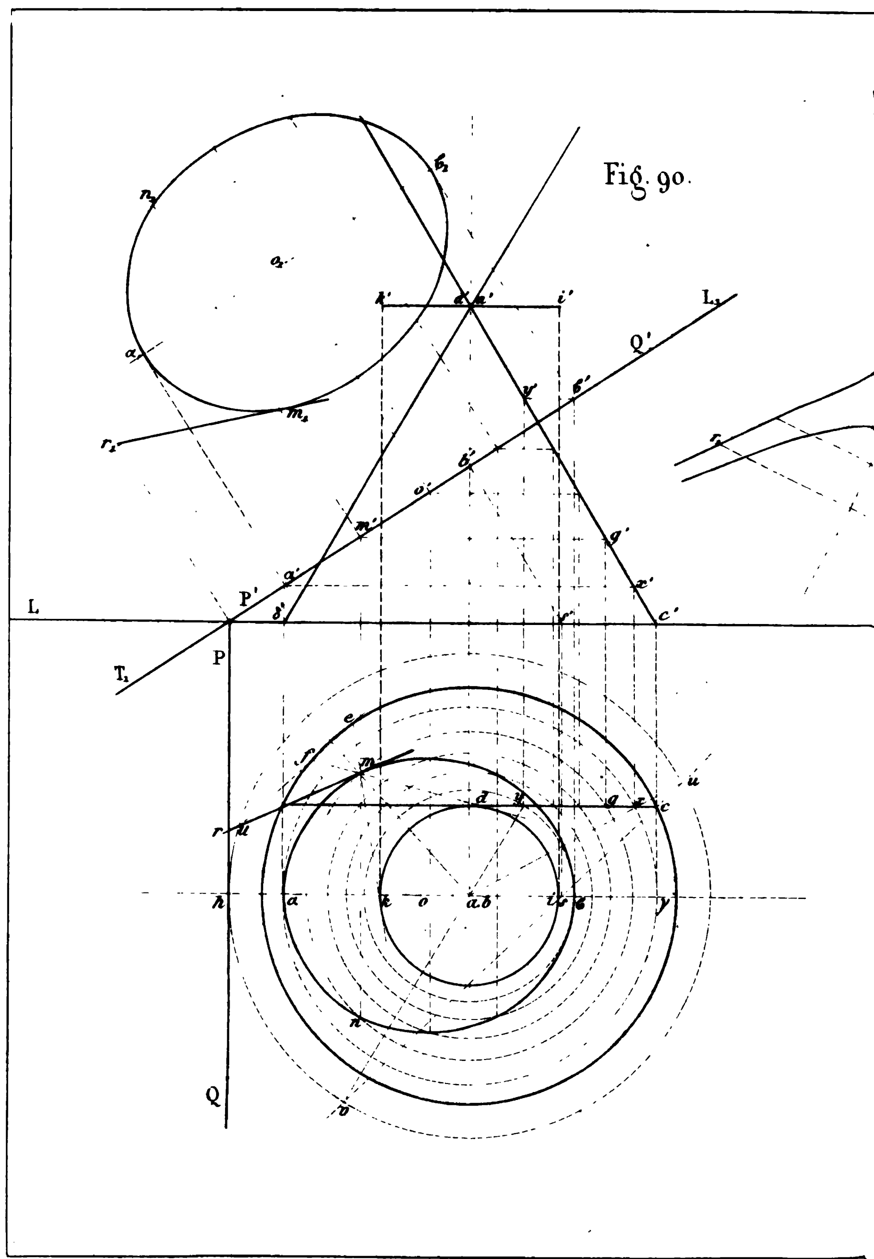
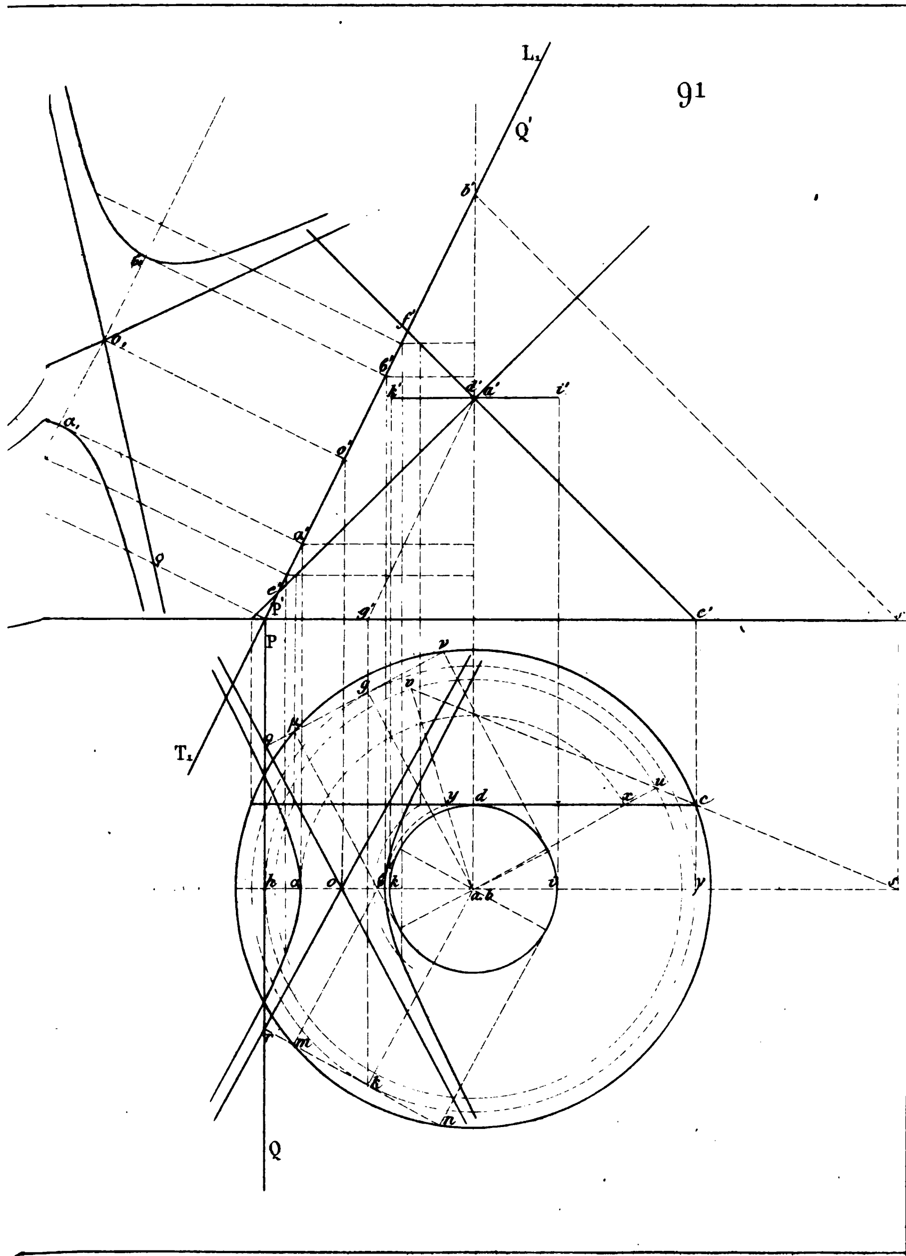


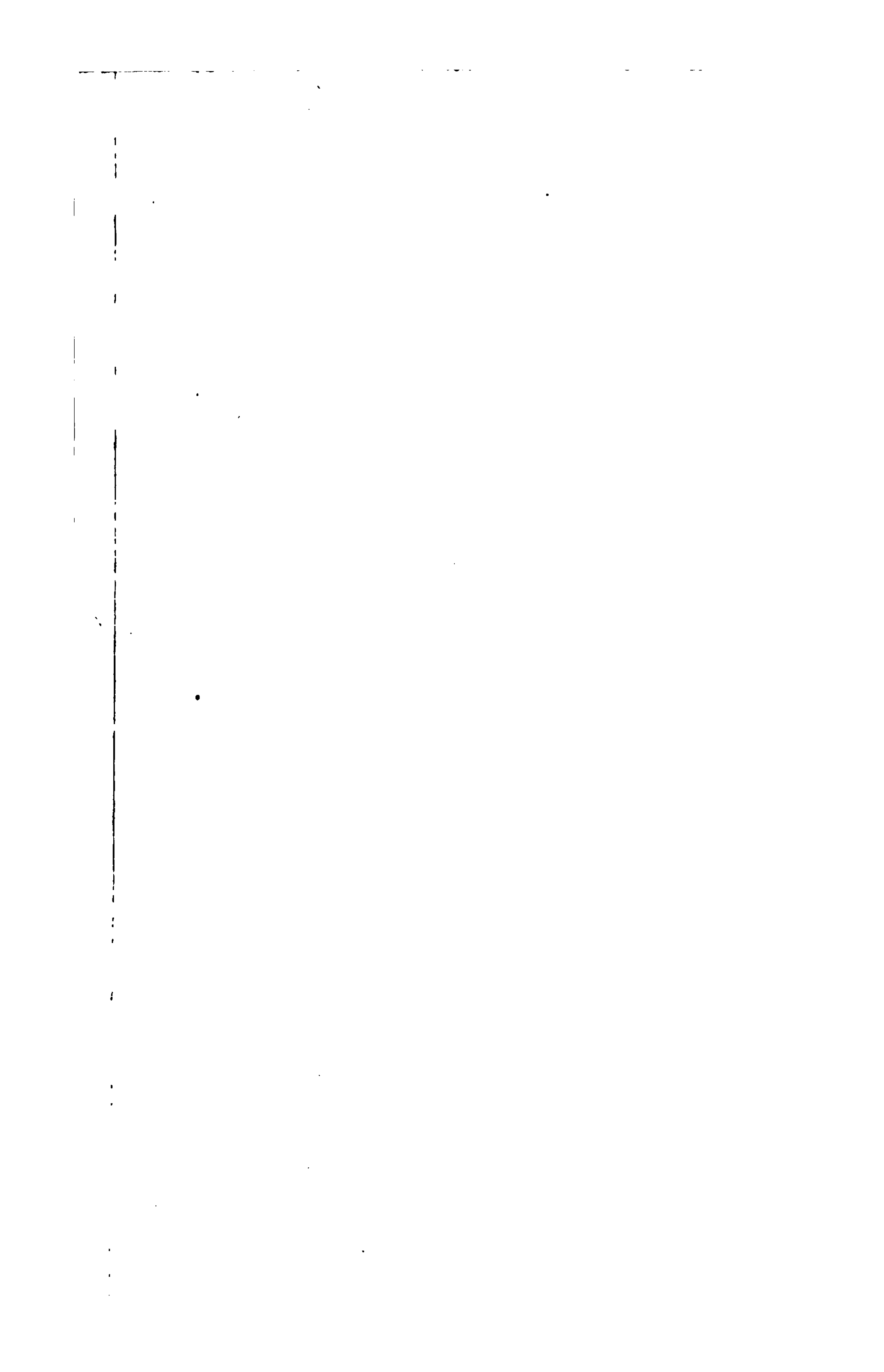
Fig. 88

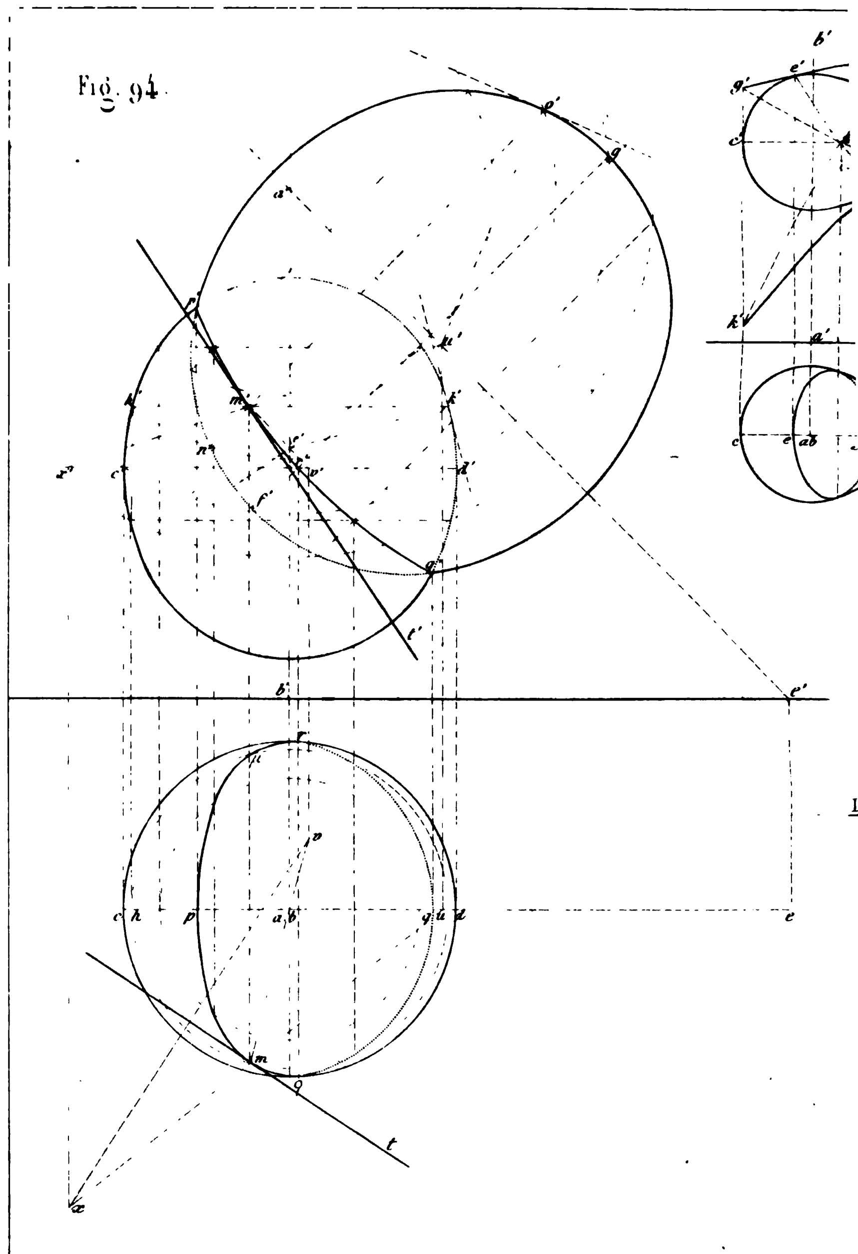

89
L
T
a'
b'
c'
d'
P'
P
Q'
Q
L₁
T₁
A
B
C
F
c
Dulos del. et sc.

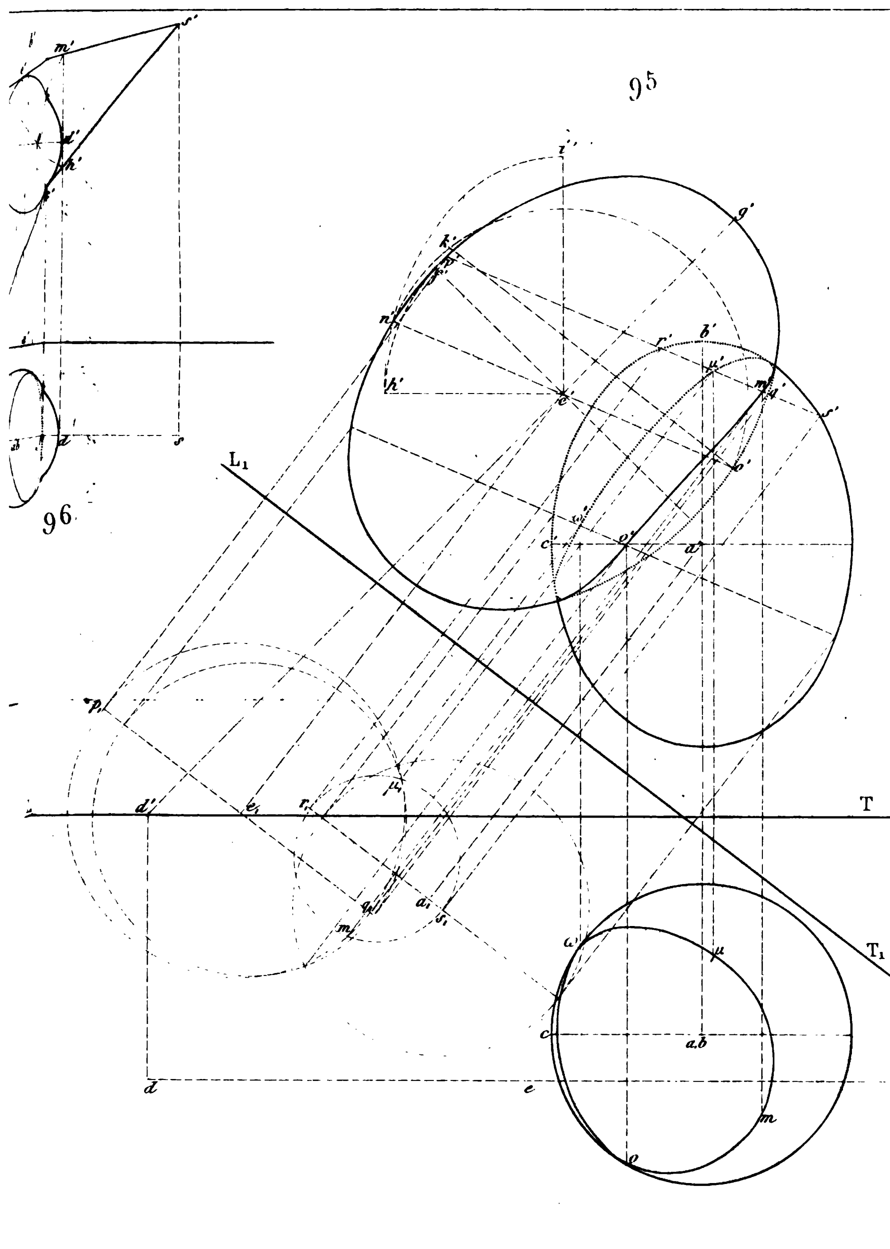

Fig. 90.



Dulos del. et sc.




Fig. 94.


9⁵
9⁶
L₁
T
T₁
Dulos sc.

